On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Un triangle

a. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$; $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

b. En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

2. Une transformation du plan

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que : $z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$, pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on note A_n le point d'affixe z_n.

a. Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives : $3 + i\sqrt{3}$; $2 + 2i\sqrt{3}$ et $2i\sqrt{3}$

On remarquera que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$

b. Comparer les longueurs des segments $[A_1 A_2]$, $[A_2 A_3]$ et $[A_3 A_4]$.

c. Établir que pour tout entier naturel *n*, on a : $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$,

où ω désigne le nombre complexe défini à la question 1. *b*.

d. En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, on a : $A_{n+6} = A_n$.

Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer, pour tout entier naturel *n*, la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$.

CORRECTION

1. Un triangle

a. Trois démonstrations possibles :

Cas 1 : puisque l'énoncé demande un angle géométrique (donc non orienté) on peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \cos \widehat{ABC}$

$\overrightarrow{BA}$ a pour affixe $-1 - i\sqrt{3}$ donc a pour coordonnées $(-1 ; -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $-3 + i\sqrt{3}$ donc a pour coordonnées $(-3 ; \sqrt{3})$ donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1) \times (-3) + (-\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$.

Cas 2 : on évalue une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right)$ or $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg(-i\sqrt{3})$ donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Cas 3 : d'après la figure le triangle ABC semble être rectangle en B

$AB^2 = |1 + i\sqrt{3}|^2 = 4$

$BC^2 = |-3 + i\sqrt{3}|^2 = 12$ et $AC^2 = |2 + 2i\sqrt{3}| = 16$

donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ le triangle ABC est rectangle en B donc $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$.

b. le triangle ABC est rectangle en B donc le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de l'hypoténuse [AC] donc $\omega = \dfrac{a+c}{2}$ donc l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

2. Une transformation du plan

a. $z_0 = 0$ donc $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_0 + 2 = 2$

$z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_1 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \times 2 + 2 = 1 + i\sqrt{3} + 2 = 3 + i\sqrt{3}$;

$z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_2 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \times (3 + i\sqrt{3}) + 2$

$z_3 = \dfrac{3 + i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} - 3}{2} + 2 = 2i\sqrt{3} + 2$

$z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_3 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \times (2 + 2i\sqrt{3}) + 2$

$z_4 = (1 + i\sqrt{3}) \times (1 + i\sqrt{3}) + 2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 + 2$

$z_4 = 2i\sqrt{3}$

Les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives : $3 + i\sqrt{3}$; $2 + 2i\sqrt{3}$ et $2i\sqrt{3}$

b. $A_1A_2^{\,2} = |3 + i\sqrt{3} - 2|^2 = |1 + i\sqrt{3}|^2 = 4$

$A_2A_3^{\,2} = |2 + 2i\sqrt{3} - (3 + i\sqrt{3})|^2 = |-1 + i\sqrt{3}|^2 = 4$

$A_3A_4^{\,2} = |2i\sqrt{3} - (2 + 2i\sqrt{3})|^2 = |-2|^2 = 4$

donc les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$ sont égales.

c. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_n - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\omega$

$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_n - \dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2}$

$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_n - \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}$

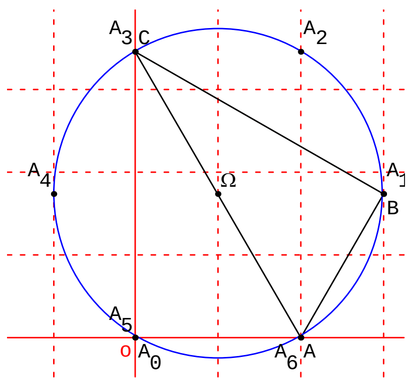
$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_n + 1 - i\sqrt{3}$

$z_{n+1} - \omega = z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_n + 2 - (1 + i\sqrt{3}) = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ z_n + 1 - i\sqrt{3}$

donc pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$.

d. Soit r la transformation d'écriture complexe $z' - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z - \omega)$

$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc la transformation r est une rotation de centre Ω d'angle $\dfrac{\pi}{3}$



pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$ donc le point A_{n+1} est l'image du point A_n par la rotation r de centre Ω d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

e. $z_{n+1} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega)$ et $z_{n+2} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+1} - \omega)$

donc $z_{n+2} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega)$

$z_{n+2} - \omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_n - \omega)$ donc $z_{n+4} - \omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_{n+2} - \omega) = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_n - \omega)$

$z_{n+4} - \omega = e^{i\frac{4\pi}{3}}(z_n - \omega)$

$z_{n+6} - \omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_{n+4} - \omega) = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{4\pi}{3}}(z_n - \omega)$

$z_{n+6} - \omega = e^{i2\pi}(z_n - \omega) = z_n - \omega$ donc $z_{n+6} = z_n$ donc, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.