Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f' est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f''. Soit a un réel fixé.

On note la courbe représentant f, A le point de **C** d'abscisse a et T la tangente en A à **C**.

A. **Un exemple: dans cette partie et dans cette partie seulement**,

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 4 \text{ et } a = -2.$$

1. Écrire une équation de la tangente à **C** en A.

2. Montrer que $f(x) - (-15x - 4) = (x + 2)^3$.

3. En déduire la position de **C** par rapport à T.

B. 1. *a.* Écrire une équation de la tangente à T en A.

b. Soit $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$ pour tout x réel. Que peut-on dire de T et de **C** si $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$?

2. On suppose que $f'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction f'.

b. Calculer $g'(x)$ et en déduire son signe selon que $x \leq a$ ou $x \geq a$.

c. En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ puis le signe de g. Qu'en déduit-on pour **C** et T ?

d. Énoncer la propriété ainsi démontrée.

3. Reprendre la question B.2. pour $f'' \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

C. Applications

Déterminer la position de par rapport à T dans chacun des cas suivants:

a. $f(x) = 2x^4 + x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}$

b. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION

A. **Un exemple:** $f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 4$ et $a = -2$.

1. $f'(x) = 3x^2 + 12x - 3$ donc le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(-2) = 3a^2 + 12a - 3 = -15$

Une équation de la tangente à **C** en A est de la forme $y = -15x + b$

Le point A $(a ; f(a))$ soit A $(-2 ; 26)$ doit appartenir à cette tangente donc $26 = -15 \times (-2) + b$

soit $26 - 30 = b$ donc $b = -4$

Une équation de la tangente à **C** en A est : $y = -15x - 4$

2. $f(x) - (-15x - 4) = x^3 + 6x^2 - 3x + 4 + 15x + 4$

$f(x) - (-15x - 4) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$f(x) - (-15x - 4) = x^3 + 3 \times 2x^2 + 3 \times 2^2 x + 2^3$

$f(x) - (-15x - 4) = (x + 2)^3$.

3. Si $x > -2$ alors $x + 2 > 0$ donc $f(x) - (-15x - 4) > 0$ la courbe C est au dessus de la tangente en A sur $]-2 ; +\infty[$

Si $x < -2$ alors $x + 2 < 0$ donc $f(x) - (-15x - 4) < 0$ la courbe C est au dessus de la tangente en A sur $]-\infty ; -2[$

Si $x = -2$, alors $x + 2 = 0$ donc $f(x) - (-15x - 4) = 0$, on retrouve que la courbe et la tangente ont un point commun A.

B. 1. *a.* Une équation de la tangente à **C** en A est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

b. Si $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, pour tout x réel, $f(x) - f'(a)(x - a) - f(a) \geq 0$ soit $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

La courbe C est au dessus de la tangente en A sur $\mathbb{R}$.

2. *a.* f'' est la dérivée de f' donc la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $g'(x) = f'(x) - f'(a)$

Si $x \leq a$ alors f' étant croissante sur $\mathbb{R}$, $f'(x) \leq f'(a)$ donc $f'(x) - f'(a) \leq 0$

Si $x \geq a$ alors f' étant croissante sur $\mathbb{R}$, $f'(x) \geq f'(a)$ donc $f'(x) - f'(a) \geq 0$

c. Si $x \leq a$, comme $f'(x) - f'(a) \leq 0$ alors $g'(x) \leq 0$

Si $x \geq a$ comme $f'(x) - f'(a) \geq 0$ alors $g'(x) \geq 0$

g admet un minimum en a donc pour tout x réel, $g(x) \geq g(a)$ or $g(a) = 0$ donc $g(x) \geq 0$

La courbe C est au dessus de la tangente en A sur $\mathbb{R}$.

d. Si la dérivée seconde d'une fonction est positive sur $\mathbb{R}$, quelque soit le point de la courbe C, la courbe C est au dessus de la tangente en en ce point.

3. *a.* f'' est la dérivée de f' donc la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. $g'(x) = f'(x) - f'(a)$

Si $x \leq a$ alors f' étant décroissante sur $\mathbb{R}$, $f'(x) \geq f'(a)$ donc $f'(x) - f'(a) \geq 0$

Si $x \geq a$ alors f' étant décroissante sur $\mathbb{R}$, $f'(x) \leq f'(a)$ donc $f'(x) - f'(a) \leq 0$

c. Si $x \leq a$, comme $f'(x) - f'(a) \geq 0$ alors $g'(x) \geq 0$
Si $x \geq a$ comme $f'(x) - f'(a) \leq 0$ alors $g'(x) \leq 0$
g admet un maximum en a donc pour tout x réel, $g(x) \leq g(a)$ or $g(a) = 0$ donc $g(x) \leq 0$
La courbe C est en dessous de la tangente en A sur $\mathbb{R}$.

d. Si la dérivée seconde d'une fonction est négative sur $\mathbb{R}$, quelque soit le point de la courbe C, la courbe C est en dessous de la tangente en en ce point.

C. Applications

a. $f(x) = 2x^4 + x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 8x^3 + 2x$ donc $f''(x) = 24x^2 + 2$ donc pour tout x réel, $f''(x) \geq 0$
Quelque soit le point de la courbe C, la courbe C est au dessus de la tangente en en ce point.

b. $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{2x^2+3} & v'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+3}} \end{cases}$$

$$\text{donc } f''(x) = 2\frac{\sqrt{2x^2+3} - x \times \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}}{(\sqrt{2x^2+3})^2}$$

$$f''(x) = 2\frac{\dfrac{(\sqrt{2x^2+3})^2 - 2x^2}{\sqrt{2x^2+3}}}{(\sqrt{2x^2+3})^2} = 2\frac{\dfrac{2x^2+3-2x^2}{\sqrt{2x^2+3}}}{2x^2+3}$$

$f''(x) = \dfrac{6}{(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}}$ donc pour tout x réel, $f''(x) \geq 0$

Quelque soit le point de la courbe C, la courbe C est au dessus de la tangente en en ce point.