Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}\,;\vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $-2 + 2i$ et par (C) le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3 + 9i}{4 + 2i}$.

Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C).

3. Sur le cercle (C), on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r . Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

CORRECTION

1. Ω est le milieu de [AB] donc a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$ donc $\omega = -\dfrac{1}{2}$

$AB = |z_A - z_B| = |-3 - 4i| = 5$ donc le rayon du cercle est $\dfrac{1}{2}$ AB = $\dfrac{5}{2}$

2. $z_D = \dfrac{(3+9i)(2-i)}{2(2+i)(2-i)}$ donc $z_D = \dfrac{6-3i+18i+9}{10} = \dfrac{15+15i}{10}$ donc $z_D = \dfrac{3+3i}{2}$

$\Omega D = |z_D - z_\Omega| = \left|\dfrac{3+3i}{2} + \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{4+3i}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$ donc D est un point du cercle (C).

3. *a.* E appartient au cercle (C), donc $\Omega E = \dfrac{5}{2}$ donc $\left|z_E + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$

$\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{\Omega E})$ or $\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{3}{2}\vec{u}$ donc $\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = (\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega E})$ or $(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega E}) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. *b.* $\left|z_E + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$ et $\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $z_E + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}]$

donc $z_E + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$ donc $z_E = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$

4. *a.* $z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - \omega)$ donc r est la rotation de centre Ω d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

4. *b.* $z' + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(2 + \dfrac{1}{2}\right)$ donc $z' = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$

$\Omega K = \dfrac{5}{2}$, donc K appartient au cercle (C). Dans la rotation de centre Ω d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, (C) est transformé en (C) donc K' appartient au cercle (C) et une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega K}\,;\overrightarrow{\Omega K'}) = \dfrac{\pi}{4}$ or $\overrightarrow{\Omega K} = 15\,\overrightarrow{\Omega I}$ donc $(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega K'}) = \dfrac{\pi}{4}$.

donc K' est le point du cercle (C), tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega K'})$ est $\dfrac{\pi}{4}$ donc K' = E