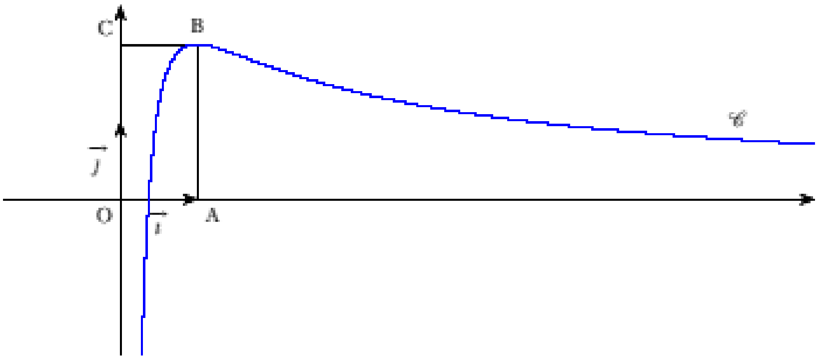
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.



On dispose des informations suivantes :
– les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;
– la courbe C passe par le point B et la droite (BC) est tangente à C en B ;
– il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$.

1. *a.* En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$

c. En déduire les réels a et b.

2. *a.* Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]\,0,\,;+\infty\,[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. *a.* Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]\,0\,;1\,]$.
b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0{,}1$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b - a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.
5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe C partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x$, terminer la démonstration.

CORRECTION

1. *a.* $f(1)$ est l'ordonnée de B donc $f(1) = 2$ et $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en B, or cette tangente est horizontale donc $f'(1) = 0$.

b. $\begin{cases} u(x) = a + b\ln x & u'(x) = \dfrac{b}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \dfrac{\dfrac{b}{x}\times x - (a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

Pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$

c. $\ln 1 = 0$ et $f(1) = 2$ donc $a = 2$

$f'(1) = b - a = 0$ donc $a = b = 2$ donc $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$.

2. *a.* $a = b = 2$ donc $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$ donc pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]\,0,\,;+\infty\,[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. $f(x) = \dfrac{2}{x}(1 + \ln x)$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(1 + \ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3. *a.* La fonction f est définie continue strictement croissante sur $]\,0\,;1\,]$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]\,0\,;1\,]$.

b. $f(5) \approx 1{,}04$ et $f(6) \approx 0{,}93$ donc $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$
Il existe un unique réel β de l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$ tel que $f(\beta) = 1$ donc $5 < \beta < 6$.

4. *a.*

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	0,46875
$f(m)$	1,23	– 3,09	0,10	0,79	1,03

b. $0{,}4375 < \alpha < 0{,}5$.

c. On cherche β tel que $f(\beta) = 1$.

x	1		β		$+\infty$
f	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0

f est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ donc pour tout x de $[\,1\,;+\infty\,[$, si $f(x) > 1$ alors $1 < x < \beta$ et si $f(x) \leq 1$ alors $x \geq \beta$

Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 1$, comme f est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ alors $\dfrac{1}{2}(a+b) < \beta$ donc $\dfrac{1}{2}(a+b) < \beta < b$

a prendra la valeur $\dfrac{1}{2}(a+b)$ dans le cas contraire $\dfrac{1}{2}(a+b) \geq \beta$ donc $a < \beta \leq \dfrac{1}{2}(a+b)$, b prendra la valeur $\dfrac{1}{2}(a+b)$.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 5. Affecter à b la valeur 6.

Traitement :	Tant que $b - a > 0{,}1$
	    Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	    Si $f(m) > 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	    Sinon affecter à b la valeur m.
	    Fin de Si.
	Fin de Tant que.

Sortie :	Afficher a. Afficher b.

5. *a.* Le rectangle OABC a pour aire OA × OC = 1 × 2 = 2

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $2(1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

La fonction f est positive sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}} ; 1\right]$, donc l'aire du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 2$ est $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Cette aire doit être la moitié de l'aire du rectangle donc il faut montrer que $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, donc une primitive de f est la fonction F définie sur $]\,0 ; +\infty\,[$ par $\mathrm{F}(x) = 2\ln x + (\ln x)^2$ donc $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ or $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$ donc $\mathrm{F}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -2 + (-1)^2 = -1$ donc $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 - (-1)$

$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, l'aire du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 2$ est la moitié de l'aire du rectangle OABC.