Amérique du Nord juin 2017

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

• $u_0 > 1$,
• pour tout $n > 0$, $u_n > 0$,
• pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

c. Montrer que pour tout $n > 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme un pour une valeur de n donnée.

a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

Entrée :	Saisir *n*
	Saisir *u*
Traitement :	*s* prend la valeur *u*
	Pour *i* allant de 1 à *n* :
	u prend la valeur ...
	s prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher U

b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4. *a.* Justifier que pour tout entier $n \geq 0$, $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Asie juin 2017

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.
2. Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : estimation de la valeur de J

Soit g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

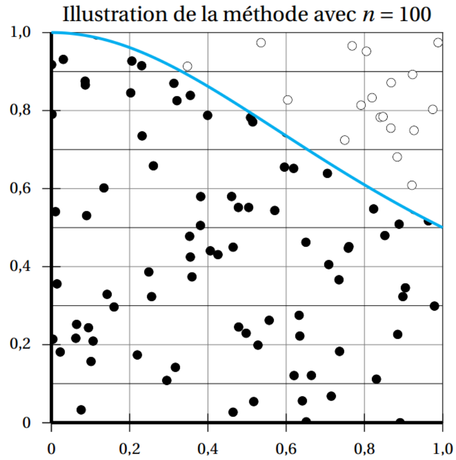
On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a donc : $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.
On choisit au hasard un point $M(x ; y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur [0 ; 1].
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe C_g est égale à l'intégrale J.
En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :
— on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur [0 ; 1] ;
— si $M(x ; y)$ est au-dessous de la courbe C_g on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \dfrac{c}{n}$ est une valeur approchée de J. C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.



1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables	*n*, *c*, *f* , *i*, *x*, *y* sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de *n*
	c prend la valeur ...
	Pour *i* allant de 1 à ... faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend ...
	    Si ... alors
	        ... prend la valeur ...
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur ...

Sortie	Afficher *f*

2. Pour $n = 1000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0{,}781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J.

3. Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?

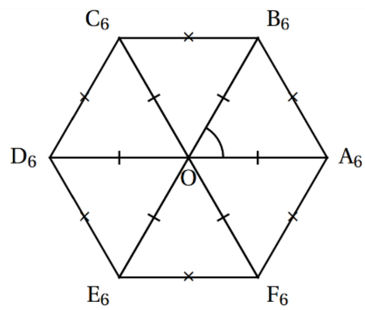
Centres étrangers juin 2017

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Pour tout entier $n > 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ donné, isocèle en O.
On note $r_n = \mathrm{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

On a représenté ci-contre un polygone P_6.



1. Justifier le fait que le triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

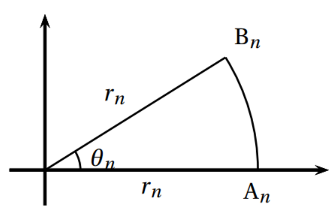
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ issue du sommet B_6.

3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$

Partie B : cas général avec $n \geq 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geq 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.

On note alors $r_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.

Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\,,\overrightarrow{\mathrm{OB}_n})$, puis démontrer que : $r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$.

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;\,\pi\,[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par : $r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;\,\pi\,[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante.

On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$

2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0{,}58$ faire
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

Métropole juin 2017

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par : $h(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et dresser son tableau de variations.

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$, on a :

$$h(x) = \mathrm{e} - x - h'(x)$$

où h' désigne la fonction dérivée de h.

b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$ de la fonction $x \to \mathrm{e}^{-x}$.

c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} + \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \ln(x+1).$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Ces deux courbes sont tracées en annexe. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$, on appelle M le point de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ et N le point de coordonnées $(x\,;\,g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes C_f et C_g.

a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

b. Placer sur le graphique fourni en annexe, les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

a. Hachurer le domaine D_λ, correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe.

b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire.

Démontrer que : $A_\lambda = 1 - \dfrac{\lambda + 1}{\mathrm{e}^{\lambda}}$.

c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

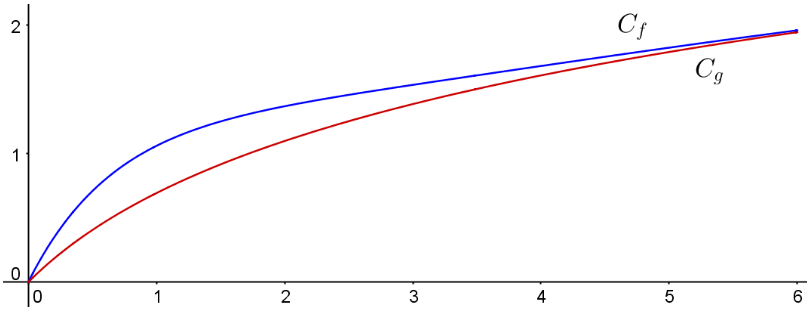
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	Saisir S
	λ prend la valeur 0
	Traitement :
	Tant Que $1-\dfrac{\lambda+1}{e^{\lambda}}<S$ faire
	λ prend la valeur λ+ 1
	Fin Tant Que
Sortie :	Afficher λ

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur S = 0,8 ?

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

ANNEXE



Nouvelle-Calédonie mars 2017

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\,e^{-x}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Justifier toutes les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par : $F(x)=(-x-1)\,e^{-x}$.

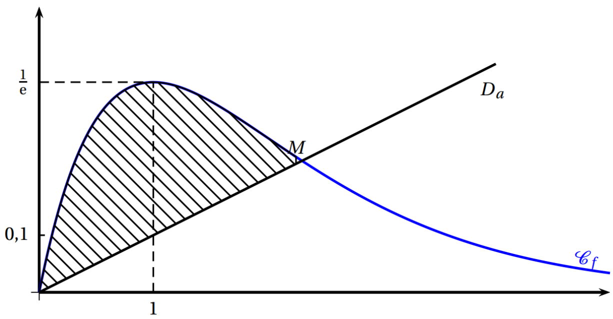
Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0<a<1$. On considère la droite D_a d'équation $y=a\,x$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe C_f. On note x_M l'abscisse du point M.

On note $\mathscr{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe C_f au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x=0$ et $x=x_M$.

Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité de la valeur de a telle que $\mathscr{H}(a)=0{,}5$ puis d'étudier un algorithme.



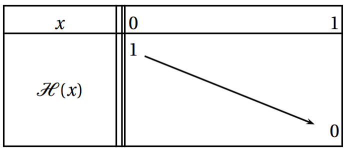
1. Prouver que la droite D_a et la courbe C_f ont un unique point d'intersection M distinct de l'origine.

On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M=-\ln a$ et que la courbe C_f est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;-\ln(a)]$.

2. Montrer que $\mathscr{H}(a)=a\ln(a)-\dfrac{1}{2}a\,(\ln(a))^2+1-a$.

3. Soit la fonction $\mathscr{H}$ définie sur $]0\,;1]$ par $\mathscr{H}(x)=x\ln(x)-\dfrac{1}{2}x\,(\ln(x))^2+1-x$.

On admet que $\mathscr{H}$ est dérivable sur]0 ; 1] et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.



Justifier qu'il existe un unique réel $a \in]0 ; 1[$ tel que $\mathscr{H}(a) = 0{,}5$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

VARIABLES	A, B et C sont des nombres ; p est un entier naturel.
INITIALISATION	Demander la valeur de p A prend la valeur 0 B prend la valeur 1

TRAITEMENT	Tant que $B - A > 10^{-p}$
	    C prend la valeur (A + B)/2
	    Si $\mathscr{H}(C) > 0{,}5$
	        Alors A prend la valeur de C
	        Sinon B prend la valeur de C
	    Fin de la boucle Si
	Fin de la boucle Tant que

SORTIE	Afficher A et B.

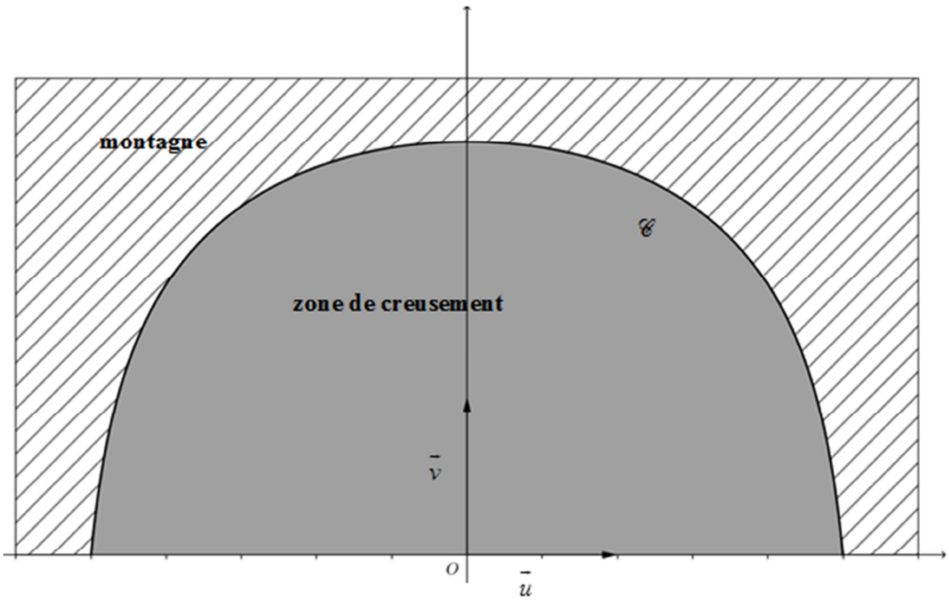
Que représentent les valeurs A et B affichées en sortie de cet algorithme ?

5. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de a.

Pondichéry avril 2017

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.

Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [– 2,5 ; 2,5] par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13{,}5).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction *f*

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2{,}5 ; 2{,}5]$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur [– 2,5 ; 2,5]. En déduire le signe de f sur [– 2,5 ; 2,5].

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A} = 8\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$ notée a.

On admet que : $a \leq I \leq a + \dfrac{f(0) - f(2{,}5)}{n} \times 2{,}5$

a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$. Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Annexe

Variables
- R et S sont des réels
- n et k sont des entiers

Traitement
- S prend la valeur 0
- Demander la valeur de n
- Pour k variant de 1 à n faire
  - R prend la valeur $\dfrac{2,5}{n} . f\left(\dfrac{2,5}{n} . k\right)$
  - S prend la valeur S + R
- Fin Pour
- Afficher S

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	S = 0	$n = 50$

Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	....	....
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	....
	....	....	....
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	49	0,020 106	5,197 538
	50	....	....
Affichage	S =		