

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2i z + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note S la surface d'équation :

$$z = x^2 + 2x + y^2 + 1.$$

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1; 0; 5)$ et de rayon 5 ».

3. **Proposition 3 :** « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

CORRECTION

1. **VRAIE**

La similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 a pour expression complexe :

$$z' - \frac{1+2i}{5} = 2i \left(z - \frac{1+2i}{5} \right)$$

$$z' = 2i z - \frac{2i-4}{5} + \frac{1+2i}{5} = 2i z + \frac{-2i+4+1+2i}{5}$$

$$z' = 2i z + 1$$

2. **FAUSSE**

$$z = (x+1)^2 + y^2$$

Soit M un point de l'intersection de S avec le plan d'équation $z = 5$

$$(x+1)^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow \Omega M^2 = 5 \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{5} \text{ où } \Omega \text{ est le point de coordonnées } (-1; 0; 5).$$

donc la section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1; 0; 5)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

3. **VRAIE**

$$5 \equiv -2 [7] \text{ donc } 5^3 \equiv (-2)^3 [7] \text{ soit } 5^3 \equiv -8 [7]$$

$$5^3 \equiv -1 [7] \text{ or } (5^3)^2 = 5^6 \text{ donc } 5^6 \equiv 1 [7]$$

$$750 = 6 \times 150 \text{ donc } 5^{750} \equiv 1 [7]$$

$$5^{750} - 1 \text{ est un multiple de } 7.$$

4. **VRAIE**

$$\text{Soit } d = \text{PGCD}(3n+4; 4n+3); 4(3n+4) - 3(4n+3) = 7 \text{ donc } d \text{ divise } 7.$$

Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors :

$$3n+4 \equiv 3+4 [7] \text{ soit } 3n+4 \equiv 0 [7]$$

$$4n+3 \equiv 4+3 [7] \text{ soit } 4n+3 \equiv 0 [7]$$

donc si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors 7 divise $3n+4$ et $4n+3$ donc leur PGCD d divise 7 et 7 divise d , $d > 0$ donc $d = 7$

5. **FAUSSE :**

Si $a = 3$ et $b = 5$ alors $3 \times 4 - 2 \times 5 = 2$ or 3 et 5 sont premiers entre eux.