Pondichéry avril 2013

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t) = \dfrac{a}{1+b\,e^{-0{,}04t}}$, où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 *m* et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 *m*.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur [0 ; 250] par $f(t) = \dfrac{2}{1+19\,e^{-0{,}04t}}$.

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 250].
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 *m*.

3. *a*. Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 250] on a : $f(t) = \dfrac{2\,e^{0{,}04t}}{e^{0{,}04t}+19}$.

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 250] par : $F(t) = 50\ln(e^{0{,}04t}+19)$ est une primitive de la fonction f.

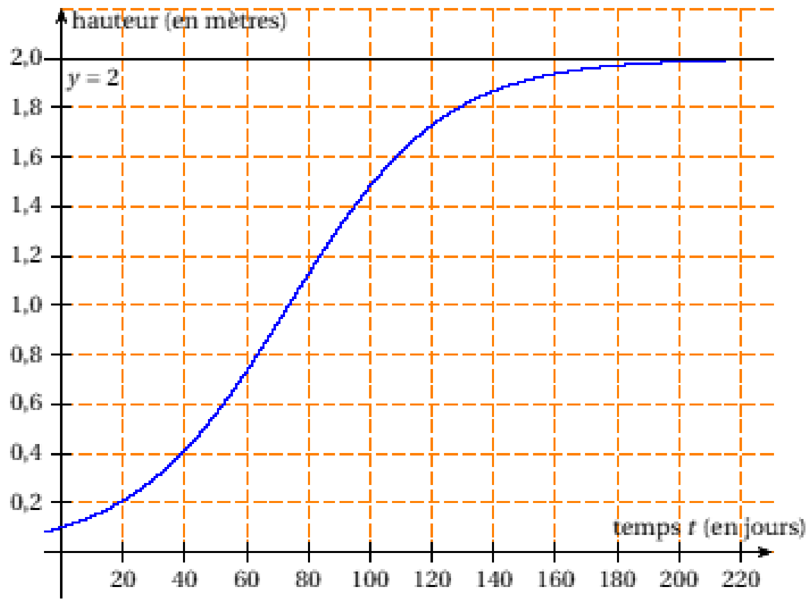
b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [50 ; 100].

En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.

La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.

En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.



EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$.

La droite (D) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$

On donne les points de l'espace M (− 1 ; 2 ; 3) et N (1 ; − 2 ; 9).

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$ *c.* $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = 1 - t - 3t' \end{cases}$ *d.* $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -1 - t' \end{cases}$.

2. *a.* La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point A (− 8 ; 3 ; 2).
b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
c. La droite (D) est une droite du plan (P).
d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

3. *a.* La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

4. *a.* Les plans (P) et (S) sont parallèles.
b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $z_{M'} = -i\, z_M$.

On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2 OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend : $z_M = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
a. Déterminer la forme algébrique de z_M.
b. Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.
Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
c. Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
Tracer la droite (OI), et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.
a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
b. Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.
c. Écrire les coordonnées des points I, B et M′.
d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.
e. Montrer que BM′ = 2 OI.

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.

Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.

Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.

Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet que pour tout entier naturel n on a : $\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125\, j_n + 0{,}525\, a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625\, j_n + 0{,}625\, a_n \end{cases}$

On introduit les matrices suivantes : A = $\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1\. *a*. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.

2\. On introduit les matrices suivantes : Q = $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et D = $\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. On admet que la matrice Q est inversible et que : $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$.

Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.

3\. On admet que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}3 + 0{,}7 \times (-0{,}25)^n & 0{,}42 - 0{,}42 \times (-0{,}25)^n \\ 0{,}5 - 0{,}5 \times (-0{,}25)^n & 0{,}7 + 0{,}3 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix}$¶

a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.

b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

• Un salarié malade est absent

• La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

• Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.

• Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

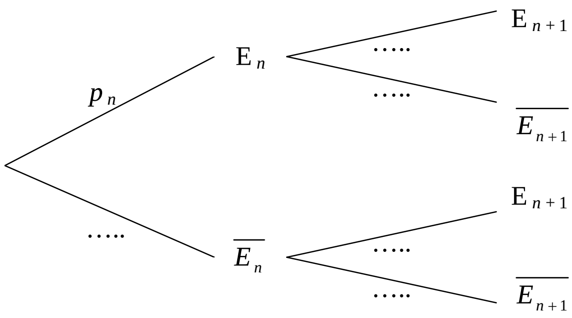
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n \leq 1$.

1\. *a*. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2\. *a*. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K

Traitement	Tant que $P < 0{,}05 - 10^{-K}$
	    P prend la valeur $0{,}2 \times P + 0{,}04$
	    J prend la valeur J + 1
	Fin tant que

Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0{,}05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.
a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.
b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	– 1,55	– 1,24	– 0,93	– 0,62	– 0,31	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z \leq x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question *b*., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie 1

Initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m donc $h(0) = 0,1$ soit $\frac{a}{1+b} = 0,1$ soit $10\,a = 1 + b$

Sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m donc $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,04\,t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = a$ d'où le système $\begin{cases} 10\,a - b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$ donc $a = 2$ et $b = 19$

$h(t) = \frac{2}{1+19\,e^{-0,04\,t}}$

Partie 2

1. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la dérivée de la fonction $\frac{1}{u}$ est $-\frac{u'}{u^2}$; la dérivée de la fonction e^{v} est $v'\,e^{v}$.

ici $v(t) = e^{-0,04\,t}$ donc $v'(t) = -0,04\,e^{-0,04\,t}$
$u(t) = 1 + 19\,e^{-0,04\,t}$ donc $u'(t) = -0,04 \times 19\,e^{-0,04\,t}$

$f'(t) = \frac{2 \times (-0,04 \times 19\,e^{-0,04\,t})}{(1+19\,e^{-0,04\,t})^2}$ soit $f'(t) = \frac{-1,52\,e^{-0,04\,t}}{(1+19\,e^{-0,04\,t})^2}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ sur [0 ; 250]

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 250].

2. Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à 1,5 $m \Leftrightarrow h(t) > 1,5$

$\frac{2}{1+19\,e^{-0,04\,t}} > 1,5 \Leftrightarrow 2 > 1,5\,(1 + 19\,e^{-0,04\,t}) \Leftrightarrow 2 > 1,5 + 28,5\,e^{-0,04\,t} \Leftrightarrow 0,5 > 28,5\,e^{-0,04\,t} \Leftrightarrow e^{-0,04\,t} < \frac{0,5}{28,5} \Leftrightarrow e^{0,04\,t} > \frac{28,5}{0,5}$

$\Leftrightarrow e^{0,04\,t} > 57 \Leftrightarrow 0,04\,t > \ln 57 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 57}{0,04}$

Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à 1,5 m après 102 jours

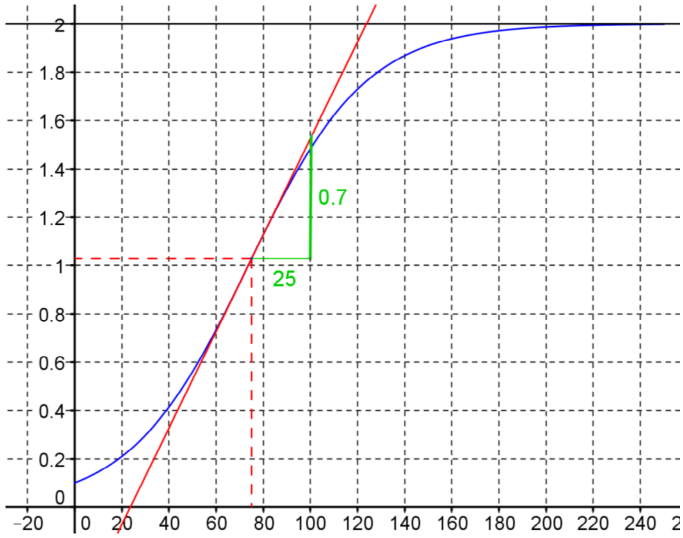
3. *a.* pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 250] on a :

$f(t) = \frac{2}{1+19\,e^{-0,04\,t}} = f(t) = \frac{2\,e^{0,04\,t}}{(1+19\,e^{-0,04\,t})\,e^{0,04\,t}}$ donc $f(t) = \frac{2\,e^{0,04\,t}}{e^{0,04\,t}+19}$

Si u est une fonction strictement positive, dérivable sur un intervalle I, la dérivée de ln u est $\frac{u'}{u}$.

donc $F'(t) = 50\,\frac{0,04\,e^{0,04\,t}}{e^{0,04\,t}+19} = \frac{2\,e^{0,04\,t}}{e^{0,04\,t}+19} = f(t)$ donc la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 250] par : $F(t) = 50\ln(e^{0,04\,t}+19)$ est une primitive de la fonction f .

b. La valeur moyenne de f sur l'intervalle [50 ; 100] est : $V_m = \frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(t)\,dt = \frac{1}{50}[\,F(100) - F(50)\,]$



$V_m = \frac{1}{50}\,[\,50\ln(e^{0,04\times 100}+19) - 50\ln(e^{0,04\times 50}+19)\,]$ donc

$V_m = \ln(e^{4}+19) - \ln(e^{0,02}+19)$ soit $V_m \approx 1,03$

$h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres

V_m désigne la hauteur moyenne d'un plant entre 50 et 100 jours donc, pendant la période située entre le 50ème et le 100ème jour, la hauteur moyenne d'un plant est de 1,03 m

4. $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente en x_0 à la courbe de f

Graphiquement, pour $x_0 \in [\,0\,;75\,]$, ces tangentes ont un coefficient directeur qui croît et pour $x_0 \in [\,75\,;250\,]$ ce coefficient directeur décroit donc la vitesse de croissance est maximale pour $t = 75$.

La vitesse maximale est alors d'environ $\frac{0,7}{25}$ soit environ 0,03, la hauteur du plan est environ de 1,02 m.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* **FAUX**

$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ ne convient pas, il s'agit de la représentation paramétrique d'une droite

b. **VRAI** $\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$

Si $t = t' = 0$, le point A de ce plan a pour coordonnées (0 ; 1 ; – 1)
$x_A - 2y_A + 3z_A + 5 = -2 - 3 + 5 = 0$ donc A appartient à (P)

Si $t = 0$ et $t' = -1$, Le point B de ce plan a pour coordonnées (– 2 ; 0 ; – 1)
$x_B - 2y_B + 3z_B + 5 = -2 - 3 + 5 = 0$ donc B appartient à (P).

Si $t = 1$ et $t' = 0$, le point C de ce plan a pour coordonnées (1 ; 0 ; – 2)
$x_C - 2y_C + 3z_C + 5 = 1 - 2 \times 3 + 5 = 0$ donc C appartient à (P).
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 2 ; – 1 ; 0).
$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (1 ; – 1 ; – 1) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés, le plan (P) est le plan (ABC) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$.

c. **FAUX** $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = 1 - t - 3t' \end{cases}$

Si $t = t' = 0$ alors le point A de ce plan a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1)
$x_A - 2y_A + 3z_A + 5 = -2 + 3 + 5 = 0$ donc A n'appartient pas à (P)

d. **FAUX** $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -1 - t' \end{cases}$.

Si $t = t' = 0$ alors le point A de ce plan a pour coordonnées (1 ; 1 ; – 1)
$x_A - 2y_A + 3z_A + 5 = 1 - 2 - 3 + 5 = 0$ donc A n'appartient pas à (P)

2. Une droite et un plan sont :
- soit strictement parallèles (pas de point d'intersection)
- soit sécants (un seul point d'intersection)
- soit la droite est contenue dans le plan (une infinité de points d'intersection)

Pour répondre aux affirmations *a*, *c*, *d*, il suffit donc de chercher l'intersection de la droite (D) et du plan (P)
Un point M appartient à (D) si et seulement ses coordonnées sont de la forme $(-2 + t ; -t ; -1 - t)$
Ce même point M appartient au plan (P) si et seulement ses coordonnées vérifient $x - 2y + 3z + 5 = 0$.
donc $-2 + t - 2 \times (-t) + 3 \times (-1 - t) + 5 = 0$
$-2 + t + 2t - 3 - 3t + 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$
Ceci est vrai pour tout t donc tous les points de la droite (D) appartiennent au plan (P) donc la droite (D) est une droite du plan (P).
Réponse *c*.

3. $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées (2 ; – 4 ; 6) et est un vecteur directeur de (MN). Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}$ (1 ; – 1 ; – 1).
$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 2 \times 1 - 1 \times (-4) + 6 \times (-1) = 2 + 4 - 6 = 0$
réponse *a*

Pour les autres réponses :
$\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées (2 ; – 4 ; 6) donc un vecteur directeur de (MN) est $\vec{u}\,'$ (1 ; – 2 ; 3) une représentation paramétrique de la droite (MN) est $\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 3 + 3t' \end{cases}$ où t' est un réel.
Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}$ (1 ; – 1 ; – 1).

Deux droites de l'espace sont

- coplanaires
  - sécantes (un seul point d'intersection)
  - parallèles
    - distinctes (pas de point d'intersection)
    - confondues (une infinité de points d'intersection)
- non coplanaires (pas de point d'intersection)

Cherchons les points d'intersection des deux droites

La droite (D) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$

On donne les points de l'espace M (− 1 ; 2 ; 3) et N (1 ; − 2 ; 9).

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ a pour coordonnées (2 ; – 4 ; 6) donc un vecteur directeur de (MN) est $\vec{u}\,'$(1 ; – 2 ; 3) une représentation paramétrique de la droite (MN) est $\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 3 + 3t' \end{cases}$ où t' est un réel.

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}$ (1 ; – 1 ; – 1).

$\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ ne sont pas colinéaires donc (MN) et (D) ne sont pas parallèles.

Un point appartient à (D) $\cap$ (MN) si ses coordonnées vérifient :

$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 3 + 3t' \end{cases}$ soit il existe t et t' tels que :

$$\begin{cases} -2 + t = -1 + t' \\ -t = 2 - 2t' \\ -1 - t = 3 + 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - t' = 1 \\ -t + 2t' = 2 \\ -t + 3t' = 4 \end{cases}$$

La somme des lignes 2 et 3 donne 5 t' = 6 donc t' = 1,2
en remplaçant : t = 0,4 or t – t' $\neq$ 1 donc les deux droites ne sont pas parallèles et ne sont pas sécantes, elles sont donc non coplanaires.
Les réponses *b*, *c*, *d* sont fausses.

4. *a*. Il suffit de regarder si un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (P) est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (alors (P) et (S) sont parallèles)

$\vec{n}$ a pour coordonnées (1 ; – 2 ; 3) et $\vec{u}$ (1 ; – 2 ; – 1) et $\vec{v}$ (2 ; – 2 ; 3)

$\vec{n}\,.\,\vec{u}$ = 1 + 4 – 3 $\neq$ 0 donc ***a*. faux**

b. Soit A le point de (Δ) obtenu pour t = 0 alors A (0 ; – 2 ; – 1)
Soit B le point de (Δ) obtenu pour t = 2 alors B (0 ; – 2 ; – 3)
Si A et B appartiennent tous deux aux plans (P) et (S) alors la droite (Δ) est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
$x_A - 2y_A + 3z_A + 5 = 0 + 4 - 9 + 9 = 0$ donc A $\in$(P)
$x_B - 2y_B + 3z_B + 5 = 0 + 4 - 9 + 5 = 0$ donc B $\in$ (P) donc ***b*. vrai**

c. $x_M - 2y_M + 3z_M + 5 = -1 - 4 + 9 + 5 \neq 0$
M $\notin$ (P) donc ***c*. faux**

d. Il suffit de regarder si un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (P) est de la forme $a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont des vecteurs directeurs de (S) (alors (P) et (S) sont perpendiculaires).

$$\vec{n} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -2a - 2b = -2 \\ -a + 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 1 \\ -a + 3b = 3 \end{cases}$$

$L_2 + L_3$ $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 1 \\ 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ or $a + 2b \neq 1$ donc il n'existe pas de réels a et b tels que $\vec{n} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ donc (P) et (S) ne sont pas perpendiculaires ***d*. faux**

EXERCICE 3

1. *a.* $z_M = 2\left(\cos\dfrac{-\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{-\pi}{3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

b. $z_{M'} = -\mathrm{i}\, z_M = -\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

$|z_{M'}| = |\mathrm{i}|\,|z_M| = 1 \times 2 = 2$

$\arg(z_{M'}) = \arg(-\mathrm{i}) + \arg(z_M)$ à 2π près

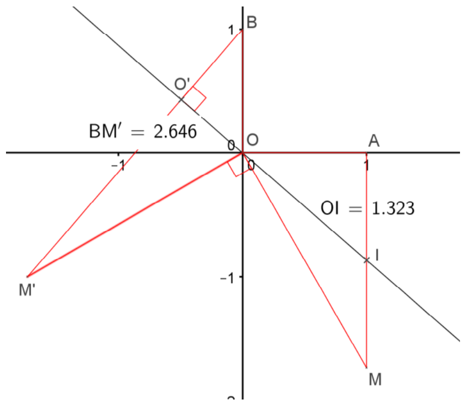
$\arg(z_{M'}) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}$ à 2π près soit $\arg(z_{M'}) = -\dfrac{5\pi}{6}$ à 2π près

En passant par la forme cartésienne de $z_{M'}$

$|z_{M'}|^2 = (-\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4$ donc $|z_{M'}| = 2$

$z_{M'} = 2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ donc $\begin{cases} 2\cos\theta = -\sqrt{3} \\ 2\sin\theta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \dfrac{\pi}{6}$ à 2π près $\Leftrightarrow \theta = -\dfrac{5\pi}{6}$ à 2π près

c.



2. *a.* I a pour affixe $\dfrac{z_A + z_M}{2} = \dfrac{x+1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{y}{2}$

b. $z_{M'} = -\mathrm{i}\, z_M = -\mathrm{i}\,(x + \mathrm{i}\, y) = y - \mathrm{i}\, x$.

c. I a pour coordonnées $\left(\dfrac{x+1}{2} ; \dfrac{y}{2}\right)$, B $(0 ; 1)$ et M' $(y ; -x)$

d. $\overrightarrow{BM'}$ a pour coordonnées $(y ; -x-1)$

$\overrightarrow{OI}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x+1}{2} ; \dfrac{y}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = \dfrac{1}{2}(x+1)\,y + \dfrac{1}{2}\,y\,(-x-1) = 0$ donc la droite (OI) est perpendiculaire à (BM') donc est une hauteur du triangle OBM′.

e. $BM'^2 = y^2 + (-x-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$

$OI^2 = \dfrac{1}{4}(x+1)^2 + \dfrac{1}{4}y^2$ donc $4\,OI^2 = BM'^2$ donc $BM' = 2\,OI$.

EXERCICE 3

1. *a.* $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125\, j_n + 0{,}525\, a_n \\ 0{,}625\, j_n + 0{,}625\, a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ donc pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

b. $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ avec $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

$U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}125 \times 200 + 0{,}525 \times 500 \\ 0{,}625 \times 200 + 0{,}625 \times 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287{,}5 \\ 437{,}5 \end{pmatrix}$.

Il y a donc 287 animaux jeunes et 437 animaux adultes après un an d'observation.

$U_2 = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 287{,}5 \\ 437{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265{,}625 \\ 453{,}125 \end{pmatrix}$

Au bout de 2 ans il *y* aura 265 jeunes et 453 adultes après deux ans d'observation.

c. Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n = A^n \times U_0$

$U_1 = A \times U_0$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.
Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $U_n = A^n \times U_0$ alors $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.
$U_{n+1} = A \times U_n$ donc $U_{n+1} = A \times A^n \times U_0$ soit $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n non nul, $U_n = A^n \times U_0$.

2. On introduit les matrices suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. $Q \times D = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}75 & 3 \\ 1{,}25 & 5 \end{pmatrix}$

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$.

$Q \times D \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}75 & 3 \\ 1{,}25 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} = A$ donc $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

b. Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

$A = Q \times D \times Q^{-1}$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.
Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$ alors $A^{n+1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$.
$A^{n+1} = A \times A^n$ donc $A^{n+1} = Q \times D \times Q^{-1} \times Q \times D^n \times Q^{-1}$
or $Q^{-1} \times Q = Id$ donc $A^{n+1} = Q \times D \times D^n \times Q^{-1}$
$A^{n+1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n non nul, $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

c. D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. *a.* $U_n = A^n \times U_0$ donc $U_n = \begin{pmatrix} 0{,}3 + 0{,}7 \times (-0{,}25)^n & 0{,}42 - 0{,}42 \times (-0{,}25)^n \\ 0{,}5 - 0{,}5 \times (-0{,}25)^n & 0{,}7 + 0{,}3 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$

$U_n = \begin{pmatrix} 200 \times (0{,}3 + 0{,}7 \times (-0{,}25)^n) + 500\,(0{,}42 - 0{,}42 \times (-0{,}25)^n \\ 200 \times (0{,}5 - 0{,}5 \times (-0{,}25)^n) + 500\,(0{,}7 + 0{,}3 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix}$

$U_n = \begin{pmatrix} 60 + 140 \times (-0{,}25)^n) + 210 - 210 \times (-0{,}25)^n \\ 100 - 100 \times (-0{,}25)^n) + 350 + 150 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix}$

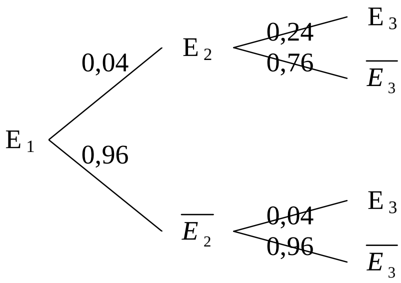
$U_n = \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0{,}25)^n \\ 450 + 50 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$

donc $j_n = 270 - 70 \times (-0{,}25)^n$ et $a_n = 450 + 50 \times (-0{,}25)^n$.
$-1 < -0{,}25 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}25)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} j_n = 270$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 450$

b. Le nombre d'animaux jeunes va tendre vers 270 et celui des adultes vers 450 au bout de quelques années.

EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

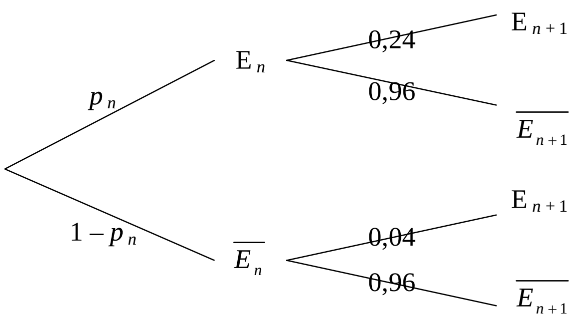
1. *a*.



$p_3 = p(E_3) = 0{,}04 \times 0{,}24 + 0{,}96 \times 0{,}04 = 0{,}048$.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine est $p = \dfrac{p(E_3 \cap E_2)}{p(E_3)} = \dfrac{0{,}04 \times 0{,}24}{0{,}048} = 0{,}2$

2. *a*.



b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E_n}) = 0{,}24\, p_n + (1 - p_n) \times 0{,}04$

$p_{n+1} = 0{,}24\, p_n + 0{,}04 - 0{,}04\, p_n$ donc $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04$.

c. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}05 = 0{,}2\, p_n + 0{,}04 - 0{,}05$

$u_{n+1} = 0{,}2\, p_n - 0{,}01 = 0{,}2\,(p_n - 0{,}05)$

$u_{n+1} = 0{,}2\, u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 0 - 0{,}05 = -0{,}05$ et de raison $r = 0{,}2$

$u_n = u_1\, r^{n-1}$ donc $u_n = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$

$p_n = u_n + 0{,}05$ donc $p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$ soit $p_n = 0{,}05\,(1 - 0{,}2^{n-1})$

d. $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$

e. En faisant tourner l'algorithme, pour toutes les valeurs de $P < 0{,}05 - 10^{-k}$, J augmente de 1 donc J est un compteur.

L'affichage final J est la valeur de l'indice n tel que $p_n > 0{,}05 - 10^{-k}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$ donc quelle que soit

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$ donc quelque soit K, il existe un indice n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $p_n \geq 0{,}05 - 10^{-K}$ donc cet algorithme s'arrête.

3. *a*. On a une succession de 220 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a 2 issues,

- succès : le salarié est malade une semaine donnée ($p = 0{,}05$)
- échec : le salarié n'est pas malade une semaine donnée ($q = 1 - p = 0{,}95$)

donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée suit une loi binomiale de paramètres (220 ; 0,05).

$\mu = E(X) = 220 \times 0{,}05 = 11$ et $\sigma(X) = \sqrt{220 \times 0{,}05 \times 0{,}95} \approx 3{,}23$

b. $P(7 \leq X \leq 15) = P\left(\dfrac{7-11}{3{,}23} \leq Z \leq \dfrac{15-11}{3{,}23}\right) = P(-1{,}24 \leq Z \leq 1{,}24) = 2\,P(Z \leq 1{,}24) - 1 = 2 \times 0{,}892 - 1 = 0{,}784$ soit 0,78 à 10^{-2} près.