Métropole juin 2013

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On envisage les évènements suivants :

– H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
– H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
– H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
– C : « l'arbre choisi est un conifère »,
– F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.
d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

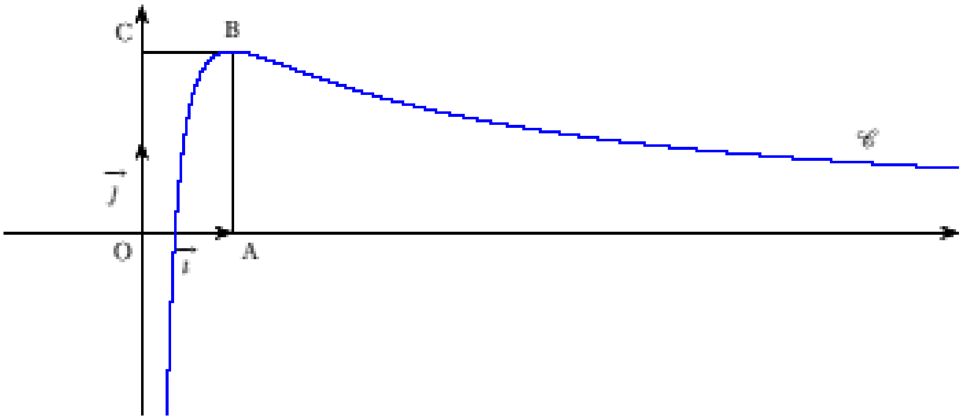
2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.
c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}
.

EXERCICE 2 7 points Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative C d'une fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

– les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;
– la courbe C passe par le point B et la droite (BC) est tangente à C en B ;
– il existe deux réels positifs *a* et *b* tels que pour tout réel strictement positif $f(x)=\dfrac{a+b\ln x}{x}$.

1. *a.* En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
b. Vérifier que pour tout réel strictement positif *x*, $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$
c. En déduire les réels *a* et *b*.

2. *a.* Justifier que pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0,;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
b. Déterminer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel *x* strictement positif, $f(x)=\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}$.
c. En déduire le tableau de variations de la fonction *f* .

3. *a.* Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;1]$.
b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1;+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$.
Déterminer l'entier *n* tel que $n<\beta<n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0{,}1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
Afficher b.	

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0			
b	1			
$b - a$				
m				

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe C partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1** :

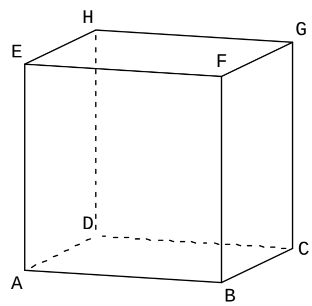
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est une droite.

2. Proposition 2 :

Le nombre complexe $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.

3. Soit ABCDEFGH un cube.

Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit le plan P d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$. On note S le point de coordonnées $(1\,;-2\,;-2)$.

Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan P a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. *a.* Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. *a.* Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

• l'effectif de la population est globalement constant,

• chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = A X$.

Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A X_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P Q et Q P. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que la matrice $P^{-1} A P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P D^n P^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

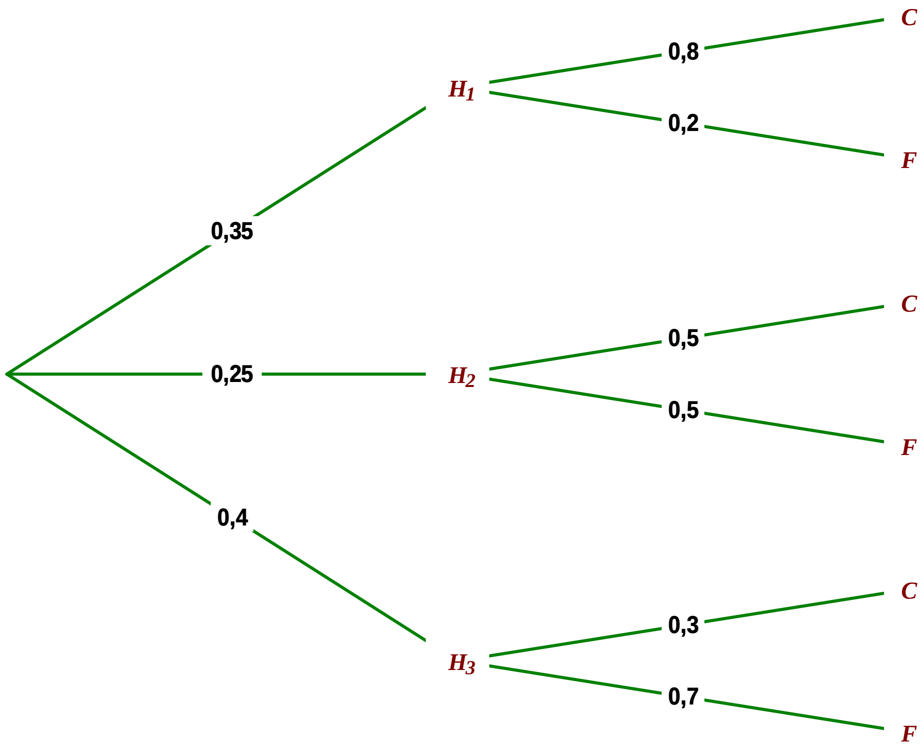
$$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n)\, v_0 + \frac{1}{6}(1 - 5 \times 0,94^n)\, c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points **Commun à tous les candidats**

1. *a.*



b. $P(C \cap H_3) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$

c. $P(C) = P(C \cap H_1) + P(C \cap H_2) + P(C \cap H_3) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}12$ donc $P(C) = 0{,}525$.

d. $P_C(H_1) = \dfrac{P(C \cap H_1)}{P(C)} = \dfrac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}525} \approx 0{,}533$.

2. *a.* On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
réussite : l'arbre prélevé est un conifère ($p = 0{,}525$)
échec : l'arbre prélevé n'est pas un conifère ($q = 0{,}475$)
donc X suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,525).

b. $P(X = 5) = \dbinom{10}{5} \times 0{,}525^5 \times 0{,}485^5 = 0{,}243$

c. Si l'échantillon comporte au moins deux arbres feuillus (donc de 2 à 10 feuillus), il a alors entre 0 et 8 conifères.
$P(X \leq 8) = 0{,}984$.

EXERCICE 2 **7 points** **Commun à tous les candidats**

1. *a.* $f(1)$ est l'ordonnée de B donc $f(1) = 2$ et $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en B, or cette tangente est horizontale donc $f'(1) = 0$

b. $\begin{cases} u(x) = a + b\ln x & u'(x) = \dfrac{b}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - (a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$

c. $\ln 1 = 0$ et $f(1) = 2$ donc $a = 2$

$f'(1) = b - a = 0$ donc $a = b = 2$ donc $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$.

2. *a.* $a = b = 2$ donc $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$ donc pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. $f(x) = \dfrac{2}{x}(1 + \ln x)$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

Pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3. *a.* La fonction f est définie continue strictement croissante sur $]\,0\,;1\,]$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]\,0\,;1\,]$.

b. $f(5) \approx 1{,}04$ et $f(6) \approx 0{,}93$ donc $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$
Il existe un unique réel β de l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$ tel que $f(\beta) = 1$ donc $5 < \beta < 6$.

4. *a.*

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	0,46875
$f(m)$	1,23	– 3,09	0,10	0,79	1,03

b. $0{,}4375 < \alpha < 0{,}5$.

c. On cherche β tel que $f(\beta) = 1$.

x	1	β	$+\infty$
f	2	$\searrow$ 1	0

f est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ donc pour tout x de $[\,1\,;+\infty\,[$, si $f(x) > 1$ alors $1 < x < \beta$ et si $f(x) \leq 1$ alors $x \geq \beta$

Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 1$, comme f est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ alors $\dfrac{1}{2}(a+b) < \beta$ donc $\dfrac{1}{2}(a+b) < \beta < b$

a prendra la valeur $\dfrac{1}{2}(a+b)$ dans le cas contraire $\dfrac{1}{2}(a+b) \geq \beta$ donc $a < \beta \leq \dfrac{1}{2}(a+b)$, b prendra la valeur $\dfrac{1}{2}(a+b)$.

```
Variables :       a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :  Affecter à a la valeur 5.
                  Affecter à b la valeur 6.
Traitement :      Tant que b – a > 0,1
                      Affecter à m la valeur 1/2 (a + b).
                      Si f (m) > 1 alors Affecter à a la valeur m.
                      Sinon affecter à b la valeur m.
                      Fin de Si.
                  Fin de Tant que.
Sortie :          Afficher a.
                  Afficher b.
```

5. *a.* Le rectangle OABC a pour aire OA × OC = 1 × 2 = 2

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $2(1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

La fonction f est positive sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]$, donc l'aire du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 2$ est $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Cette aire doit être la moitié de l'aire du rectangle donc il faut montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, donc une primitive de f est la fonction F définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $\mathrm{F}(x) = 2\ln x + (\ln x)^2$ donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ or $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$ donc $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -2 + (-1)^2 = -1$ donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 - (-1)$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, l'aire du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 2$ est la moitié de l'aire du rectangle OABC.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1. Proposition 1 : VRAI

Soit les points A d'affixe i, B d'affixe – 1 et M d'affixe z, $| z - i | = | z + 1 | \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB].

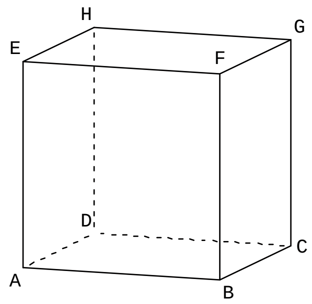
2. Proposition 2 : FAUX

$(1+i\sqrt{3})^2 = 1 - 3 + 2i\sqrt{3} = -2 + 2i\sqrt{3}$ donc $(1+i\sqrt{3})^4 = 4(-1 + i\sqrt{3})^2 = 4(1 - 3 - 2i\sqrt{3})$

$(1+i\sqrt{3})^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$

Autre méthode : $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $(1+i\sqrt{3})^4 = 2^4 e^{4i\frac{\pi}{3}} = 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - 8i\sqrt{3}$

3. Proposition 3 : VRAI



$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}$ donc $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG}$

la droite (EF) est perpendiculaire au plan (BCG) est orthogonale à la droite (BG) donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} = 0$

Les diagonales (BG) et (CF) du carré BCGF sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG} = 0$ donc $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = 0$

4. Proposition 4 : VRAI

P est le plan d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$ donc $\vec{n}(1 ; 1 ; 3)$ est un vecteur normal à P.

Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ donc Δest perpendiculaire à P.

Le point de Δ de paramètre – 1 a pour coordonnées (1 ; – 2 ; – 2) donc S appartient à Δ donc Δ est la droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan P

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{7}{3}$ soit environ 2,33

n	0	1	2	3	4
u_n	2	2,33	2,89	3,59	4,40
u_n		$\frac{7}{3}$	$\frac{26}{9}$	$\frac{97}{27}$	$\frac{356}{81}$

b. Cette suite semble être croissante.

2. *a.* Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 2$ donc $u_0 \leq 0 + 3$ la propriété est vérifiée pour $n = 0$

<u>Hérédité :</u> Montrons que pour tout entier naturel n, si $u_n \leq n + 3$ alors $u_{n+1} \leq n + 4$.

$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ or $u_n \leq n + 3$ donc $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(n + 3) + \frac{1}{3}n + 1$ soit $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$ soit $u_{n+1} \leq n + 3$

or $n + 3 \leq n + 4$ donc $u_{n+1} \leq n + 4$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - u_n + \frac{1}{3}n + 1 = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ donc :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ or pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$ donc $+ 3 - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite (u_n) est croissante.

3. *a.* $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - (n + 1) = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$

$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

$v_0 = u_0 - 0 = 2$ donc pour tout entier naturel n, $v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b. $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4. a. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ donc $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n + 1 + 2 + \ldots + n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc $v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 de premier terme 0).

donc $S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{n(n+1)}{2}$

On pouvait retrouver ces résultats en refaisant la démonstration :

$S_n = 2\left(1+\frac{2}{3}+...+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 1 + 2 + \ldots + n$

En posant $S = \left(1+\frac{2}{3}+...+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ et $S' = 1 + 2 + \ldots + n$ alors $S_n = 2S + S'$

$$\begin{array}{rcccccccccc}
S & = & 1 & + & \frac{2}{3} & + \ldots + & \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} & + & \left(\frac{2}{3}\right)^n & & \\
\frac{2}{3}S & = & & & \frac{2}{3} & + \ldots + & \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} & + & \left(\frac{2}{3}\right)^n & + & \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\
\hline
S-\frac{2}{3}S & = & 1 & + & 0 & + \ldots + & 0 & + & 0 & - & \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}
\end{array}$$

donc $\frac{1}{3}S = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ donc $1 + \frac{2}{3} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$ donc $v_0 + v_1 + ... + v_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S' & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\
S' & = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S' & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

donc $S' = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_n = 2S + S' = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{n(n+1)}{2}$

b. $T_n = \dfrac{S_n}{n^2} = \dfrac{6}{n^2} \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{n+1}{2n}$ donc $T_n = \dfrac{6}{n^2} \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6}{n^2} \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $v_{n+1} = 0{,}95\, v_n + 0{,}01\, c_n$ et $c_{n+1} = 0{,}05\, v_n + 0{,}99\, c_n$

2. $\text{Y} = \text{A X} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95\,a + 0{,}01\,b \\ 0{,}05\,a + 0{,}99\,b \end{pmatrix}$ donc $c = 0{,}95\,a + 0{,}01\,b$ et $d = 0{,}05\,a + 0{,}99\,b$

3. *a.* $\text{P Q} = \text{Q P} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6\,\text{I}_2$ donc $\text{P}^{-1} = \dfrac{1}{6}\text{Q}$.

b. $\text{A P} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}94 \\ 5 & 0{,}94 \end{pmatrix}$ donc $\text{P}^{-1}\text{A P} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}94 \\ 5 & 0{,}94 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5{,}64 \end{pmatrix}$

$\text{P}^{-1}\text{A P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix} = \text{D}$

c. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\text{A}^n = \text{P D}^n \text{P}^{-1}$.

<u>Initialisation :</u> $n = 1$, $\text{P}^{-1}\text{A P} = \text{D}$ donc $\text{P P}^{-1}\text{A P P}^{-1} = \text{P D P}^{-1}$ donc $\text{A} = \text{P D P}^{-1}$

La propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, si $\text{A}^n = \text{P D}^n \text{P}^{-1}$ alors $\text{A}^{n+1} = \text{P D}^{n+1} \text{P}^{-1}$.

$\text{A}^{n+1} = \text{A} \times \text{A}^n = \text{P D P}^{-1} \text{P D}^n \text{P}^{-1} = \text{P D} \times \text{D}^n \text{P}^{-1}$ donc $\text{A}^{n+1} = \text{P D}^{n+1} \text{P}^{-1}$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\text{A}^n = \text{P D}^n \text{P}^{-1}$.

4. $-1 < 0{,}94 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}94^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{6}\, v_0 + \dfrac{1}{6}\, c_0 = \dfrac{1}{6}(v_0 + c_0)$

Le 1^er^ janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants donc $v_0 + c_0 = 250\,000$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{6} \times 250\,000$

La répartition de la population de cette région à long terme sera donc de $\dfrac{1}{6} \times 250\,000$ dans les villes et $\dfrac{5}{6} \times 250\,000$ dans les campagnes soit 1 habitant dans les villes pour 5 dans les campagnes.