Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage haute qualité et un encodage standard.
On sait que :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- Les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considère les événements suivants :
C : « le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;
V : « le morceau écouté est un morceau de variété » ;
J : « le morceau écouté est un morceau de jazz » ;
H : « le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;
S : « le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité que ce soit un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
2. On sait que P(H) = $\frac{13}{20}$.

a. Les événements C et H sont-ils indépendants ?

b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

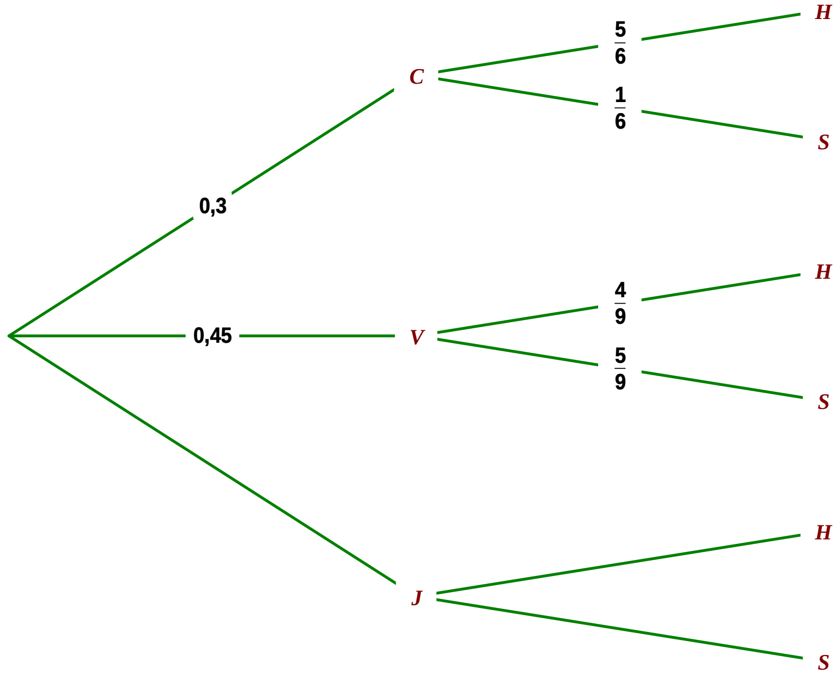
Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de morceaux de musique classique de taille 60.
2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

CORRECTION

Partie 1



1. La probabilité que ce soit un morceau de musique classique encodé en haute qualité est $\frac{5}{6} \times 0,3 = 0,25$

2. $P(C \cap H) = 0,25$ et $P(C) \times P(H) = 0,3 \times \frac{13}{20} = 0,195$ donc $P(C \cap H) \neq P(C) \times P(H)$

Les événements C et H ne sont pas indépendants.

b. P(J) = 1 – 0,3 – 0,45 = 0,25

$P(H) = P(C \cap H) + P(V \cap H) + P(J \cap H)$ donc $\frac{13}{20} = 0,3 \times \frac{5}{6} + 0,45 \times \frac{4}{9} + P(J \cap H)$

$P(J \cap H) = \dfrac{13}{20} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}$

$P(J \cap H) = P_J(H) \times P(J)$ donc $\dfrac{1}{5} = P_J(H) \times \dfrac{1}{4}$ donc $P_J(H) = \dfrac{4}{5}$.

Partie 2

1. $p = 0{,}3$, $n = 60$; $n\,p = 18$ et $n\,(1 - p) = 42$ donc $n \geq 30$; $n\,p \geq 5$ et $n\,(1 - p) \geq 5$; les conditions d'application sont vérifiées.

$I = \left[\ 0{,}3 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}3 \times (1 - 0{,}3)}{60}}\ ;\ 0{,}3 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}3 \times (1 - 0{,}3)}{60}}\ \right]$ donc I = [0,184 : 0,416]

2. La proportion de morceaux de musique classique dans l'échantillon est $\dfrac{12}{60} = 0{,}2$

$0{,}2 \in I$ donc la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas n'est pas défectueuse au risque 5 %.

Partie 3

1. $P(180 \leq X \leq 220) = P(X \leq 220) - P(X \leq 180) = 0{,}841 - 0{,}159 = 0{,}682$
2. $P(X \geq 240) = 1 - P(X \leq 240) = 0{,}023$