Un cercle de centre A de rayon R (R réel positif) est l'ensemble des points du plan tels que AM = R

Le plan étant rapporté à un repère **orthonormé** $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les points A et M ayant pour coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x ; y)$ dans ce repère.

Déterminer une équation d'un cercle

Il faut commencer par le début : $AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

Exemple :
Déterminer l'équation du cercle de centre A(– 1 ; 2) de rayon 3 :
$AM = 3 \Leftrightarrow AM^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
soit en développant : $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

Reconnaître un cercle et ses éléments caractéristiques (centre et rayon)

Soit une équation de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cet ensemble de points.
Le but est de transformer $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ en $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ pour se ramener à une interprétation AM = R

Exemple 1
Soit l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ tels que : $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$
Le but est d'arriver à mettre cette équation sous la forme : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$
On regroupe les termes en x d'une part et les termes en y d'autre part :
$x^2 - 6x + y^2 - 8y - 24 = 0$
$x^2 - 6x$ est le début du développement de $(x - 3)^2$ or $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ donc $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$
$y^2 - 8y$ est le début du développement de $(y - 4)^2$ or $(y - 4)^2 = y^2 - 8y + 16$ donc $y^2 - 8y = (y - 4)^2 - 16$
donc en remplaçant dans $x^2 - 6x + y^2 - 8y - 24 = 0$ on obtient : $x^2 - 6x + y^2 - 8y - 24 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 - 24 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$ est de la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ avec $x_A = 3$; $y_A = 4$ et $R^2 = 49$ donc $R = 7$
Donc $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$ est l'équation d'un cercle de centre A (3 ; 4) de rayon 7

Exemple 2 :
Soit l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ tels que : $x^2 + y^2 + 5x - 3y - 7{,}5 = 0$
$x^2 + 5x + y^2 - 3y - 7{,}5 = 0$

$x^2 + 5x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ or $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4}$ donc $x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

$y^2 - 3y$ est le début du développement de $\left(y - \frac{3}{2}\right)^2$ or $\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = y^2 - 3x + \frac{9}{4}$ donc $y^2 - 3x = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

donc en remplaçant on obtient : $x^2 + 5x + y^2 - 3y - 7{,}5 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 7{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \left(x - \frac{-5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 16$

$\left(x - \frac{-5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 16$ est de la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ avec $x_A = -\frac{5}{2}$; $y_A = \frac{3}{2}$ et $R^2 = 16$ donc $R = 4$

Donc $x^2 + y^2 + 5x - 3y - 7{,}5 = 0$ est l'équation d'un cercle de centre A $\left(-\frac{5}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ de rayon 4.

Deux cas particuliers :
Si après transformation, on aboutit à une expression de la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = k$ avec $k < 0$, on ne pas avoir une expression positive $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$ égale à un terme strictement négatif, l'ensemble obtenu est vide.

Si après transformation, on aboutit à une expression de la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 0$, alors $(x - x_A)^2 = -(y - y_A)^2$
donc $x - x_A = 0$ et $y - y_A = 0$. L'ensemble obtenu est réduit au point A