Antilles Guyane septembre 2013

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

• Soit il avance d'un pas tout droit ;

• Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;

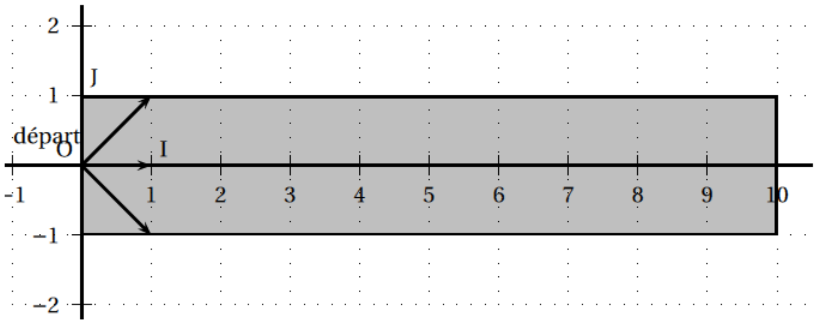
• Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées (0 ; 0) au début de la traversée. On note (x ; y) les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ − 1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre − 1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur y + n
    Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
```

1. On donne les couples suivants : (− 1 ; 1) ; (10 ; 0) ; (2 ; 4) ; (10 ; 2).

Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est (x ; y) », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée – 1 ».

B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».

C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a : $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5. A l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148

n	a_n	b_n	c_n
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

CORRECTION

Partie A : modélisation et simulation

1. (– 1 ; 1) ne peut pas être obtenu par l'algorithme car x commence en 0 puis augmente de 1 en 1 donc est toujours positif.
(10 ; 0) peut être obtenu par l'algorithme par exemple en choisissant à chaque étape, $n = 0$.
Au bout de 10 étapes $x = 10$ et $y = 0$, $x > 9$ donc l'algorithme s'arrête.

(2 ; 4) ne peut pas être obtenu par l'algorithme car $y \leq 1$ donc si $y = 1$ alors à l'étape suivante y peut être égal à 0, 1 ou 2,
Si $y = 2$, comme $y > 1$, l'algorithme s'arrête.

(10 ; 2) peut être obtenu par l'algorithme par exemple en choisissant $n = 1$ pendant les deux premières étapes en 0 ensuite alors au bout de 10 étapes $x = 10$ et $y = 2$, $x > 9$ donc l'algorithme s'arrête.

2.

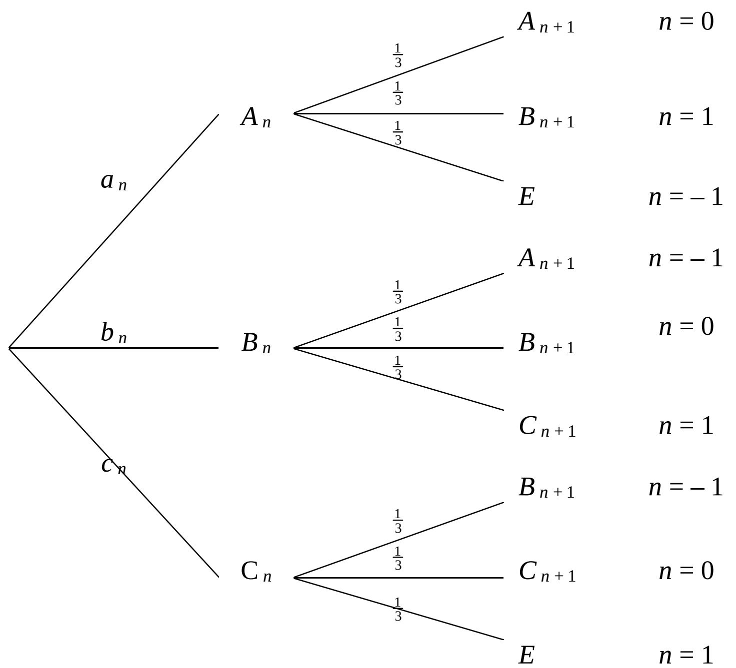
```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ − 1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
        Affecter à n une valeur choisie au hasard entre − 1, 0 et 1
        Affecter à y la valeur y + n
        Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Si x = 10 et y (y² – 1) = 0
        Afficher « Tom a réussi la traversée »
Sinon
        Afficher « Tom est tombé ».
Fin de l'algorithme
```

Partie B

1. A_0 l'évènement « après 0 déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée – 1 » est impossible : Tom se trouve en O donc $a_0 = 0$
B_0 l'évènement « après 0 déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 » est toujours vrai : Tom se trouve en O donc $b_0 = 1$
C_0 l'évènement « après 0 déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 » est impossible : Tom se trouve en O donc $c_0 = 0$.

2. $a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3}$ $\quad b_{n+1} = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3}$ $\quad c_{n+1} = b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3}$

Soit E l'événement : « Tom est tombé ».



3. $p(A_1) = = \frac{1}{3}(a_0 + b_0) = \frac{1}{3}$ $\quad p(B_1) = = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{1}{3}$ $\quad p(C_1) = \frac{1}{3}(b_0 + c_0) = \frac{1}{3}$

4. $p(A_2) = = \frac{1}{3}(a_1 + b_1) = \frac{2}{9}$ $\quad p(B_2) = = \frac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1) = \frac{1}{3}$ $\quad p(C_2) = \frac{1}{3}(b_1 + c_1) = \frac{2}{9}$

La probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements est : $p(A_2) + p(B_2) + p(C_2) = \frac{7}{9}$.

5. Tom traverse le pont : $p = a_{10} + b_{10} + c_{10}$ donc $p = 0{,}040\,272 + 0{,}056\,953 + 0{,}040\,272 = 0{,}137497$