Amérique du Nord Juin 1999

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), l'unité graphique étant 4 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = 1$ et $b = e^{\frac{i\pi}{12}}$. Le point C est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

1 : *a* : Calculer l'affixe c du point C sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

***b* :** Soit I le milieu du segment [AC]. Calculer l'affixe du point I.

***c* :** Faire une figure.

2 : *a* : Prouver que les droites (OI) et (OB) sont confondues.

***b* :** Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe du point I.

***c* :** Déterminer cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$. Les valeurs exactes sont exigées.

On indique que $\sqrt{4\sqrt{3}+2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

CORRECTION

Rappel:

On sait que, si A a pour affixe a, et si r est la rotation de centre A et d'angle α, alors , M étant d'affixe z et M' d'affixe z', on a:

$$r(M) = M' \text{ si et seulement si } z' = a + e^{i\alpha}(z - a).$$

1: *a*: r(B) = C, donc : $c = b\, e^{i\frac{\pi}{12}}$, d'où, comme $b = e^{i\frac{\pi}{12}}$,

$c = e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Comme on sait que cos $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que sin$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, on en déduit la forme algébrique de c : $c = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$

***b*:** I est le milieu de [AC], donc, comme 1 est l'affixe de A et c est l'affixe de C, on a : $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + i\,\frac{1}{4}$

2: *a*: $b = e^{i\frac{\pi}{12}} \times a$ donc r(A) = B.

On sait que r(B) = C.

Donc l'image par r du segment [AB] est le segment [BC]. Comme une rotation est une isométrie du plan (conservation des distances), on en déduit que AB = BC.

De plus, O étant le centre de la rotation, on a: OA = OB =OC.

Donc, la droite (OB) est la médiatrice du segment [AC].(ensemble des points équidistants à A et C)

De plus, on a AI = CI, car I est le milieu de [AC]. Donc I est sur la médiatrice de [AC].

D'où, (OI) = (OB).

***b*:** La forme trigonométrique de z_I est :

$z_I = |z_I|.(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ où $|z_I| = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

***c*:** Une équation de la droite (OI) est :

$x = (\sqrt{3} + 2)\, y$ ou encore $y = (2 - \sqrt{3})\, x$

Comme B est sur la droite (OI), ses coordonnées vérifient l'équation précédente. De plus, comme OB = 1, et que cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$ sont positifs, on peut dire que les coordonnées de B sont les solutions du système suivants : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x = (\sqrt{3}+2)y \end{cases}$

Ceci conduit à : $y^2 (8 + 4\sqrt{3}) = 1$ et donc à : $y = \frac{1}{\sqrt{4(2+\sqrt{3})}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

et donc : $x = (\sqrt{3} + 2)\, y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

D'où les valeurs exactes : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$