Polynésie juin 2009

Exercice 1 4 points Commun à tous les candidats.

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.

Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. *a.* Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.

4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

• commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,

• détruit s'il est rejeté au moins deux fois,

• commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connus les résultats suivants :

• Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c, avec A ≠ C et A ≠ B :

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{\text{AB}}{\text{AC}} \text{ et } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AB}}) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif ;}$$

• Soit z un nombre complexe et soit θ un nombre réel : $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d' affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 1 cm.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = iz + 4 + 4i$.

1. *a.* Déterminer l'affixe ω du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe z on a : $z' - 4i = i(z - 4i)$.

c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. On note A et B les points d'affixes respectives $a = 4 - 2i$ et $b = -4 + 6i$.

a. Placer les points A, B et Ω sur une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

b. Déterminer les affixes des points A′ et B′ images respectives des points A et B par f.

3. On appelle m, n, p et q les affixes des points M N, P et Q, milieux respectifs des segments [AA′], [A′B], [BB′] et [B′A].

a. Déterminer m. On admettra que $n = 1 + 7i$, $p = -3 + 3i$ et $q = 1 - i$.

b. Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

c. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{q-m}{n-m}$. En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.

4. Démontrer que les droites (B′A) et (ΩN) sont perpendiculaires.

Exercice 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connu le résultat suivant :

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme

$z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si A, B, A′ et B′ sont quatre points tels que A est distinct de B et A′ est distinct de B′, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A′ et B en B′.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 2$, $z_C = 4 + 6i$, $z_D = -1 + i$ et $z_E = -3 + 3i$.

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soit f la similitude plane directe telle que f (A) = D et f (B) = A.
a. Donner l'écriture complexe de f.
b. Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.
c. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.
d. En déduire la nature du triangle DAE.
4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre [AB] et par (Γ_2) le cercle de diamètre [AD].
On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).
a. Déterminer l'image de M par la similitude f.
b. En déduire la nature du triangle ΩMN.
c. Montrer que MB × NE = MC × NA.

Exercice 3 5 points Commun à tous les candidats.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points : A(1 ; − 1 ; 3), B(0 ; 3 ; 1), C(6 ; − 7 ; − 1), D(2 ; 1 ; 3) et E(4 ; − 6 ; 2).
1. *a.* Montrer que le barycentre du système {(A, 2), (B, − 1), (C, 1)} est le point E.
b. En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $\left\| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 2\sqrt{21}$.
2. *a.* Montrer que les points A, B et D définissent un plan.
b. Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).
c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).
3. *a.* Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
b. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).
4. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*
Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

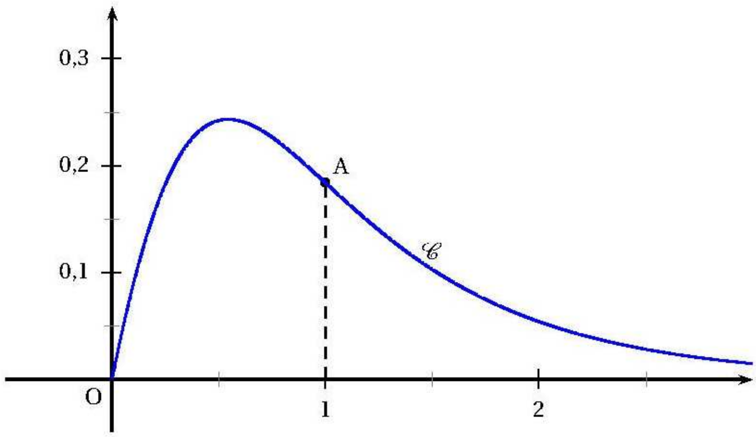
Exercice 4 6 points Commun à tous les candidats.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

La courbe (C), donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur [0 ; + ∞ [, de fonction dérivée f' continue sur [0 ; + ∞ [.

La courbe (C) passe par les points O et $A\left(1\ \frac{1}{e}\right)$; et, sur [0 ; 1], elle est au dessus du segment [OA].



1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}$.

2. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx > \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur [0 ; + ∞ [par : $f(x) = \frac{x\,e^{-x}}{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en + ∞. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur [0 ; + ∞ [par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; + ∞ [.
3. *a.* Montrer que pour tout x de [0 ; + ∞ [, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
b. En déduire les variations de f sur [0 ; + ∞ [.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{2n} f(x)\,dx$.

a. Montrer que pour tout x de [0 ; + ∞ [, $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

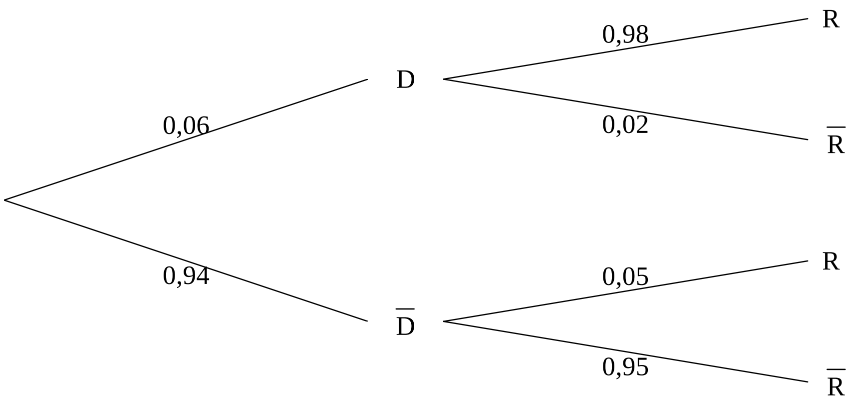
b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$.

c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers + ∞.

CORRECTION

Exercice 1 4 points Commun à tous les candidats.

1.



2. ***a.*** Les événements D et R sont indépendants donc D et $\overline{\text{R}}$ aussi donc $p(\text{D} \cap \overline{\text{R}}) = p(\text{D}) \times p(\overline{\text{R}}) = 0{,}06 \times 0{,}02 = 0{,}0012$

b. $p = p(\overline{\text{D}} \cap \text{R}) + p(\text{D} \cap \overline{\text{R}}) = 0{,}94 \times 0{,}05 + 0{,}0012 = 0{,}0482$

3. $p(\overline{\text{R}}) = p(\overline{\text{D}} \cap \overline{\text{R}}) + p(\text{D} \cap \overline{\text{R}}) = 0{,}94 \times 0{,}95 + 0{,}0012 = 0{,}8942$.

4. On a une succession de 4 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elle a deux issues :
succès : le lecteur est accepté par le contrôle ($p = 0{,}8942$)
échec : le lecteur est rejeté par le contrôle ($q = 1 - p = 0{,}1058$)
Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de contrôles positifs, X suit une loi binomiale de paramètres (4 ; 0,8942).

a. $p(\text{X} = 4) = 0{,}6393$
Le gain est alors égal à 120 – 50 = 70 € donc $p(\text{G} = 70) = 0{,}6393$

Le lecteur est détruit s'il est rejeté au moins 2 fois donc s'il est rejeté 2 ; 3 ou 4 fois donc s'il subit avec le test 2 ; 1 ou 0 fois
La probabilité que le lecteur soit détruit est $p = p(\text{X} \le 2) = p(\text{X} = 0) + p(\text{X} = 1) + p(\text{X} = 2) = 0{,}0581$
Le gain est alors égal à – 50 € donc $p(\text{G} = -50) = 0{,}0581$

Le lecteur est commercialisé sans le logo s'il est rejeté une seule fois donc accepté 3 fois
La probabilité que le lecteur soit commercialisé sans le logo est $p(\text{X} = 3) = 0{,}3026$
Le gain est alors égal à 60 – 50 = 10 € donc $p(\text{G} = 10) = 0{,}3026$

La loi de probabilité de la variable aléatoire G est résumée dans le tableau :

x	– 50	10	70	Total
$p(\text{G} = x)$	0,0581	0,3026	0,6393	1
$x\, p(\text{G} = x)$	– 2,905	3,026	44,751	44,872

b. A 10^{-2} près, l'espérance mathématique de G est 44,87.
Sur un grand nombre de lecteurs vendus, le gain moyen sera de 44,87 €.

Exercice 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Deux cas sont à envisager :

Cas 1 : Si M = Ω alors M' = Ω donc $z = z' = \omega$ donc $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ est vérifiée.

Cas 2 : si M ≠ Ω, alors $z \neq \omega$ donc $z - \omega \neq 0$

$$\text{M}' = r(\text{M}) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega\text{M}' = \Omega\text{M} \\ (\overrightarrow{\Omega\text{M}}, \overrightarrow{\Omega\text{M}'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \text{ est un entier relatif}$$

$$\begin{cases} \Omega\text{M}' = \Omega\text{M} \\ (\overrightarrow{\Omega\text{M}}, \overrightarrow{\Omega\text{M}'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z' - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).$$

Dans les deux cas : la rotation r d'angle α et de centre Ω d' affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

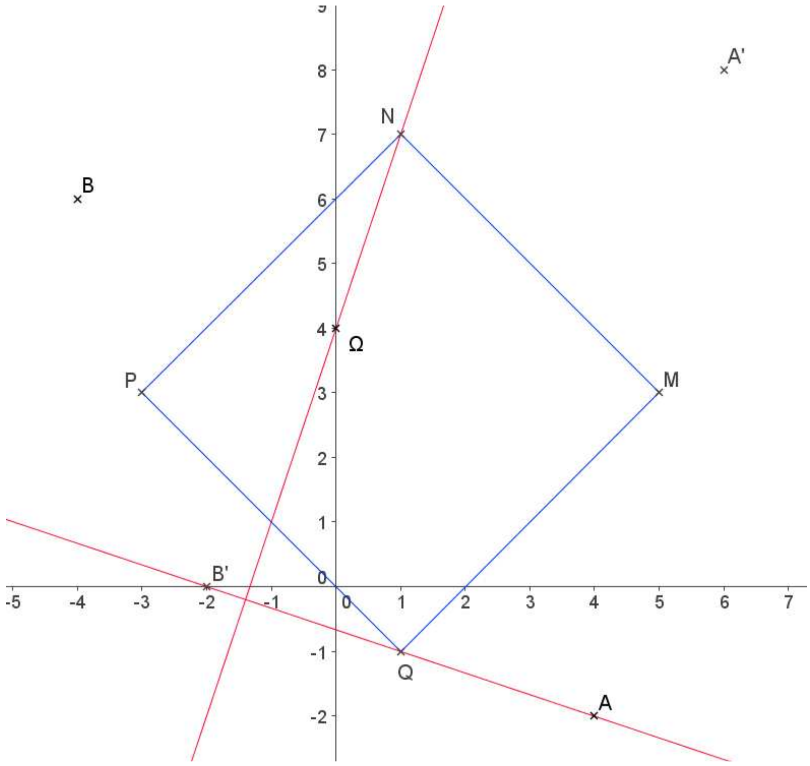
Partie B

1. *a.* $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \omega = \mathrm{i}\,\omega + 4 + 4\,\mathrm{i} \Leftrightarrow \omega = \dfrac{4+4\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \Leftrightarrow \omega = 4\,\mathrm{i}$

b. $z' = \mathrm{i}\,z + 4 + 4\,\mathrm{i}$ et $\omega = \mathrm{i}\,\omega + 4 + 4\,\mathrm{i}$ donc par différence membre à membre : $z' - \omega = \mathrm{i}\,(z - \omega)$ soit $z' - 4\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(z - 4\,\mathrm{i})$.

c. $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ donc $z' - 4\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(z - 4\,\mathrm{i}) \Leftrightarrow z' - 4\,\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,(z - 4\,\mathrm{i})$ donc f est la rotation de centre Ω (4 i) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2. *a.*



b. A' est le point d'affixe $a' = \mathrm{i}\,(4 - 2\,\mathrm{i}) + 4 + 4\,\mathrm{i} = 6 + 8\,\mathrm{i}$
B' est le point d'affixe $b' = \mathrm{i}\,(-4 + 6\,\mathrm{i}) + 4 + 4\,\mathrm{i} = -2$

3. *a.* $m = \dfrac{a + a'}{2} = 5 + 3\,\mathrm{i}$. On admettra que $n = 1 + 7\,\mathrm{i}$, $p = -3 + 3\,\mathrm{i}$ et $q = 1 - \mathrm{i}$.

b. $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ a pour affixe $n - m = -4 + 4\,\mathrm{i}$; $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ a pour affixe $p - q = -4 + 4\,\mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$
Le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

c. $q - m = -4 - 4\,\mathrm{i}$ donc $\dfrac{q-m}{n-m} = \dfrac{-4-4\,\mathrm{i}}{-4+4\,\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

$\left|\dfrac{q-m}{n-m}\right| = 1$ donc MQ = MN donc quadrilatère MNPQ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur donc est un losange.

$\arg\left(\dfrac{q-m}{n-m}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc $(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MQ}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc le quadrilatère MNPQ est losange qui *a* deux côtés consécutifs perpendiculaires donc est un carré.

4. $\overrightarrow{\mathrm{B'A}}$ a pour affixe $a - b' = 4 - 2\,\mathrm{i} + 2 = 6 - 2\,\mathrm{i}$; $\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}}$ a pour affixe $n - \omega = 1 + 7\,\mathrm{i} - 4\,\mathrm{i} = 1 + 3\,\mathrm{i}$

$(\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}}, \overrightarrow{\mathrm{B'A}}) = \arg\left(\dfrac{6-2\,\mathrm{i}}{1+3\,\mathrm{i}}\right) + 2\,k\,\pi$ or $\dfrac{6-2\,\mathrm{i}}{1+3\,\mathrm{i}} = -2\,\mathrm{i}$ donc $\arg\left(\dfrac{6-2\,\mathrm{i}}{1+3\,\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc $(\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}}, \overrightarrow{\mathrm{B'A}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc les droites (B'A) et (ΩN) sont perpendiculaires.
On pouvait aussi utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B'A}} = 6 \times 1 - 2 \times 3 = 0$ donc les droites (B'A) et (ΩN) sont perpendiculaires.

Exercice 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

si A, B, A′ et B′ sont quatre points tels que A est distinct de B et A′ est distinct de B′, alors leurs affixes, z_A, z_B, $z_{A'}$, $z_{B'}$ sont telles que $z_A \neq z_B$, et $z_{A'} \neq z_{B'}$ soit $z_A - z_B \neq 0$, et $z_{A'} - z_{B'} \neq 0$

Une similitude directe admet une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Chercher s'il existe une similitude directe transformant A en A′ et B en B′ revient à chercher s'il existe deux complexes a et b tels que

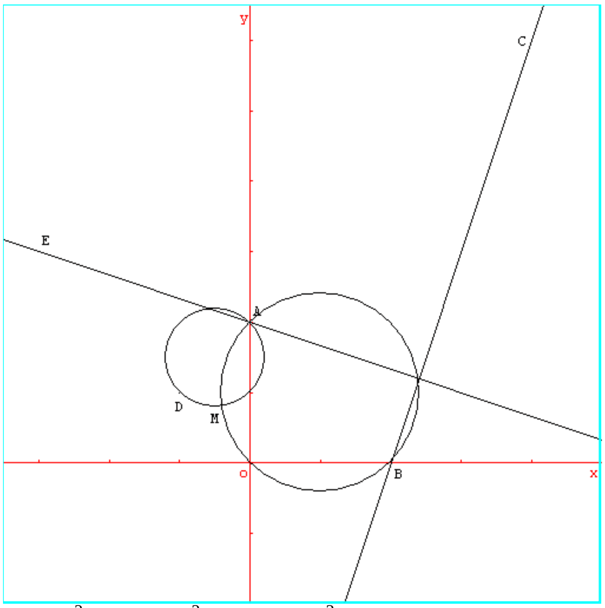
$$\begin{cases} z_{A'} = a\,z_A + b \\ z_{B'} = a\,z_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} - z_{B'} = a\,(z_A - z_B) \\ z_{B'} = a\,z_B + b \end{cases} \text{ or } z_A - z_B \neq 0 \begin{cases} z_{A'} - z_{B'} = a\,(z_A - z_B) \\ z_{B'} = a\,z_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \\ z_{B'} = a\,z_B + b \end{cases}$$

$z_{A'} - z_{B'} \neq 0$ donc $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, a est unique et $b = z_{B'} - a\,z_B$ donc b aussi est unique donc l'écriture de f est unique.

si A, B, A′ et B′ sont quatre points tels que A est distinct de B et A′ est distinct de B′, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A′ et B en B′.

Partie B

1.



2. $AB^2 = |\,2 - 2\,i\,|^2 = 8$, $AC^2 = |\,4 + 4\,i\,|^2 = 32$, $BC^2 = |\,2 + 6\,i\,|^2 = 40$,
$AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc le triangle ABC et rectangle en A

3. *a.* Il suffit de résoudre le système $\begin{cases} -1 + i = 2\,i\,a + b \\ 2\,i = 2\,a + b \end{cases}$

Par différence membre à membre : $L_1 - L_2 : -1 - i = 2\,(-1 + i)\,a$ donc $a = \dfrac{-1 - i}{2\,(-1 + i)} = \dfrac{1}{2}i$

en remplaçant dans $2\,i = 2\,a + B$ on obtient : $2\,i = i + b$ donc $b = i$ donc l'écriture complexe de f est $z' = \dfrac{1}{2}i\,z + i$

b. f est une similitude directe de rapport $|\,a\,| = \dfrac{1}{2}$ et d'angle $\arg(a) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ $(k \in Z)$

Le centre de f est le point invariant par f donc l'affixe est solution de $z' = z$ donc $z = \dfrac{1}{2}i\,z + i$ soit $(2 - i)\,z = 2\,i$

donc $z = \dfrac{2\,i}{2 - i} = \dfrac{2\,i\,(2 + i)}{5} = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}$ i donc le centre Ω de cette similitude est le point d'affixe $-\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}$ i

c. Soit C' l'image de C par f alors $c' = \dfrac{1}{2}i\,(4 + 6\,i) + i = -3 + 3\,i = z_E$ donc C' = E

La similitude f transforme A, B, C en D, A, E et transforme un triangle en un triangle donc le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f .

d. Une similitude conserve les angles donc le triangle ABC étant rectangle en A, le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f , et f (A) = D alors le triangle DAE est rectangle en D.

4. *a.* La similitude f transforme la droite (BC) en la droite (f (B) f (C)) donc en la droite (AE)

f (A) = D et f (B) = A, la similitude f transforme le cercle (Γ_1) de diamètre [AB] en le cercle de diamètre [f (A) f (B)] donc en le cercle (Γ_2) ; M ≠ B donc f (M) ≠ A donc f (M) est le second point d'intersection autre que A du cercle (Γ_2) et de la droite (AE) donc f (M) = N

b. f est la similitude directe de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en N donc le triangle ΩMN est rectangle en Ω donc Ω appartient au cercle de diamètre [MN]

c. f est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$,

f (M) = N et f (C) = E donc $\frac{\text{NE}}{\text{MC}} = \frac{1}{2}$ de plus f (B) = A et f (M) = N donc $\frac{\text{NA}}{\text{MB}} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{\text{NE}}{\text{MC}} = \frac{\text{NA}}{\text{MB}}$ donc MB × NE = MC × NA.

Exercice 3 5 points Commun à tous les candidats.

1. ***a.*** Le barycentre du système {(A, 2), (B, − 1), (C, 1)} a pour coordonnées $\left(\frac{2\,x_{\text{A}} - x_{\text{B}} + x_{\text{C}}}{2-1+1} ; \frac{2\,y_{\text{A}} - y_{\text{B}} + y_{\text{C}}}{2-1+1} ; \frac{2\,z_{\text{A}} - z_{\text{B}} + z_{\text{C}}}{2+1-1}\right)$

donc $\left(\frac{2\times 1 - 0 + 6}{2} ; \frac{2\times(-1) - 3 + (-7)}{2} ; \frac{2\times 3 - 1 + (-1)}{2}\right)$ soit (4 ; − 6 ; 2) donc est le point E.

b. $2\,\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}} = 2\,\overrightarrow{\text{ME}}$ donc $\left\| 2\,\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}} \right\| = 2\sqrt{21} \Leftrightarrow 2\text{ ME} = 2\sqrt{21} \Leftrightarrow \text{ME} = \sqrt{21}$

Γ est la sphère de centre E de rayon $\sqrt{21}$.

2. ***a.*** $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées (– 1 ; 4 ; – 2) ; $\overrightarrow{\text{AD}}$ a pour coordonnées (1 ; 2 ; 0) les coordonnées de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ ne sont pas proportionnelles donc $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et D définissent un plan.

b. $\overrightarrow{\text{EC}}$ a pour coordonnées (2 ; – 1 ; – 3)

$\overrightarrow{\text{EC}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = x\,x' + y\,y' + z\,z' = -2 - 4 + 6 = 0$ donc les droites (EC) et (AB) sont orthogonales

$\overrightarrow{\text{EC}} \cdot \overrightarrow{\text{AD}} = x\,x' + y\,y' + z\,z' = 2 - 4 = 0$ donc les droites (EC) et (AD) sont orthogonales

les droites (AB) et (AD) sont deux droites sécantes du plan (ABD) ; la droite (EC) est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan donc la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

c. la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD) donc $\overrightarrow{\text{EC}}$ est un vecteur normal du plan (ABD) donc une équation du plan est de la forme $2\,x - y - 3\,z + d = 0$

A appartient à ce plan donc $2 + 1 - 9 + d = 0$ donc $d = 6$

Une équation cartésienne du plan (ABD) est $2\,x - y - 3\,z + 6 = 0$

3. ***a.*** M ∈ (EC) ⇔ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\text{EM}} = k\,\overrightarrow{\text{EC}}$

une représentation paramétrique de la droite (EC) est $\begin{cases} x = 2\,k + 4 \\ y = -\,k - 6 \\ z = -\,3\,k + 2 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

b. F ∈ (EC) ⇔ il existe un réel k tel que $\begin{cases} x = 2\,k + 4 \\ y = -\,k - 6 \\ z = -\,3\,k + 2 \end{cases}$; F ∈ (ABD) ⇔ $2\,x - y - 3\,z + 6 = 0$

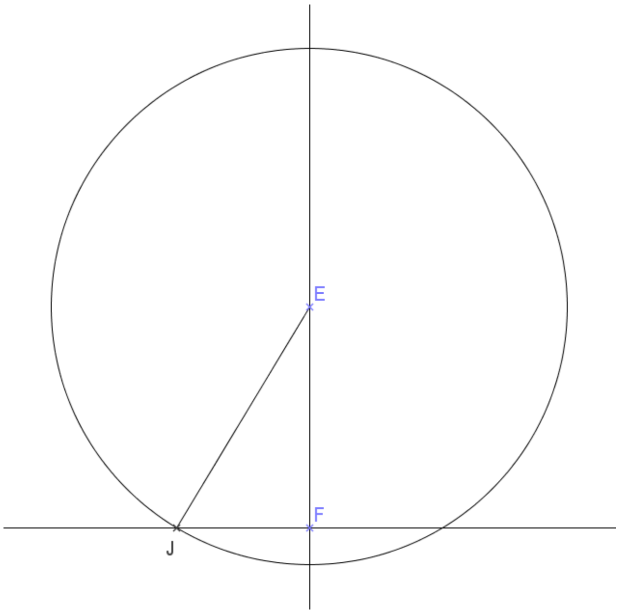
F ∈ (EC) ∩ (ABD) ⇔ $\begin{cases} x = 2\,k + 4 \\ y = -\,k - 6 \\ z = -\,3\,k + 2 \end{cases}$ et $2\,x - y - 3\,z + 6 = 0$

$2\,(2\,k + 4) - (-\,k - 6) - 3\,(-\,3\,k + 2) + 6 = 0 \Leftrightarrow 14\,k + 14 = 0 \Leftrightarrow k = -\,1$

Les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD) sont (2 ; – 5 ; 5)

4. Γ est la sphère de centre E de rayon $\sqrt{21}$

La droite (EC) passe par E et est orthogonale au plan (ABD) donc le point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD) est la projection orthogonale de E sur le plan (ABD).



La distance de E au plan (ABD) est égale à EF ou peut se calculer à l'aide de la formule :

$$d = \frac{|2\times 4-(-6)-3\times 2+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$\sqrt{14} < \sqrt{21}$ donc le plan (ABD) et la sphère sont sécants, leur intersection γ est une cercle de centre la projection orthogonale de E sur le plan (ABD).

Soit J un point du cercle γ

Le triangle EFJ est rectangle en F donc $EF^2 + FJ^2 = EJ^2$

or EF = $\sqrt{14}$

FJ est le rayon de γ

EF est égal au rayon de la sphère donc EF = $\sqrt{21}$

$FJ^2 = 21 - 14 = 7$ donc le rayon de γ est $\sqrt{7}$.

γ est le cercle de centre F de rayon $\sqrt{7}$.

Exercice 4 6 points Commun à tous les candidats.

Partie A

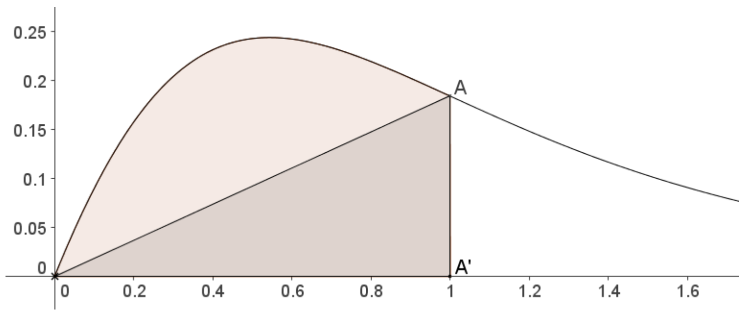
1. La courbe (C) passe par les points O et $A\left(1\ ;\ \frac{1}{2\,\mathrm{e}}\right)$ donc $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$

La fonction f est une primitive de f' donc $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

2. La fonction f est positive et continue sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est la mesure de l'aire du domaine D limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

sur [0 ; 1], la courbe (C) est au dessus du segment [OA] donc l'aire du domaine D est supérieure à l'aire du triangle OAA' où A' est de coordonnées (1 ; 0)

l'aire du triangle OAA' est égale à $\frac{1}{2} \times OA' \times AA' = \frac{1}{2} \times x_A \times y_A = \frac{1}{4\,\mathrm{e}}$ donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{4\,\mathrm{e}}$



Partie B

1. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{e}^{-x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

La courbe (C) admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote en $+\infty$.

2. g est un polynôme donc est une fonction continue dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$\Delta = 4 - 4 \times 3$ donc $\Delta < 0$

pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

$g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

donc g est une fonction continue strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, $g([0\ ;+\infty[) = [-1\ ;+\infty[$

$0 \in [-1\ ;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. *a.* Il faut bien décomposer le calcul : le numérateur est un produit et la dérivée de e^{-x} est $-e^{-x}$
Si $u(x) = x\,e^{-x}$ alors $u'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x}$
Si $v(x) = x^2 + 1$ alors $v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{(1-x)\,e^{-x}\,(x^2+1) - 2x \times x\,e^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x+x^2-x^3)\,e^{-x} - 2x^2 e^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x-x^2-x^3)\,e^{-x}}{(x^2+1)^2} = -\frac{e^{-x}}{(x^2+1)^2}\,g(x)$$

pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $\dfrac{e^{-x}}{(x^2+1)^2} > 0$ donc pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

b.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4. *a.* Pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $0 \leq \dfrac{x}{x^2+1}$

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ donc pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{x^2+1} \geq 0$

donc pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $0 \leq \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

b. pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $0 \leq \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$, la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $0 \leq \dfrac{x}{x^2+1}\,e^{-x} \leq \dfrac{1}{2}\,e^{-x}$

Les fonction $x \to \dfrac{x}{x^2+1}\,e^{-x}$ et $x \to \dfrac{1}{2}\,e^{-x}$ sont continues sur $[0\ ;+\infty[$ et pour tout entier naturel n, $2n \geq n$ donc

$0 \leq \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,dx \leq \int_n^{2n} \frac{1}{2}\,e^{-x}\,dx$ soit $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\Big[-e^{-x}\Big]_n^{2n}$ soit pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$.

c. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}) = 0$ or pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.