Amérique du Nord juin 2016

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production a et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;

D « la bille a été fabriquée par la machine B » ;

V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2. Justifier que $P(B \cap V) = 0.372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3. Un technicien affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B pu une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}055$.

Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la **partie A**, au centième près.

2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = l$ et d'écart-type σ ', σ ' étant un réel strictement positif ;

Sachant que $P(0{,}9 \leq Y \leq 1{,}1) = 0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ '.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, Jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

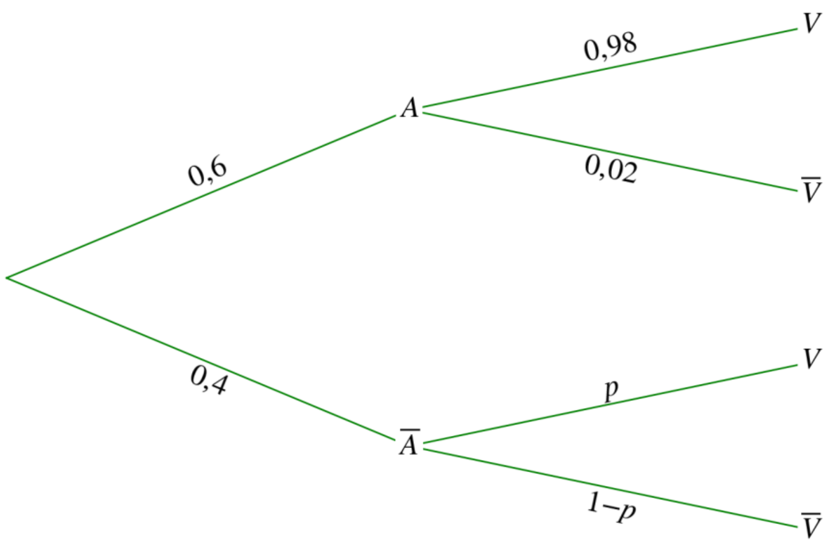
a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99%, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

CORRECTION

Partie A



1. $p(A \cap V) = 0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}588$

2. $p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) = 0{,}96$ donc $p(B \cap V) = 0{,}96 - 0{,}588$ soit $p(B \cap V) = 0.372$

$p(B \cap V) = p(B) \times p_B(V)$ donc $p_B(V) = \dfrac{0{,}4}{1 - p(A)} = \dfrac{0{,}372}{0{,}4} = 0{,}93$

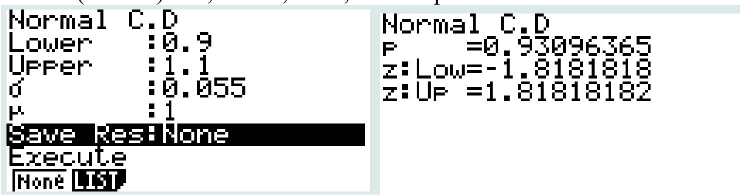
3. $p(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$

$p(\overline{V} \cap B) = p(B) - p(V \cap B) = 0{,}4 - 0{,}372 = 0{,}028$

$p_{\overline{V}}(B) = \dfrac{p(\overline{V} \cap B)}{p(\overline{V})} = \dfrac{0{,}028}{0{,}04} = 0{,}7$. Le technicien qui affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B *a* raison.

Partie B

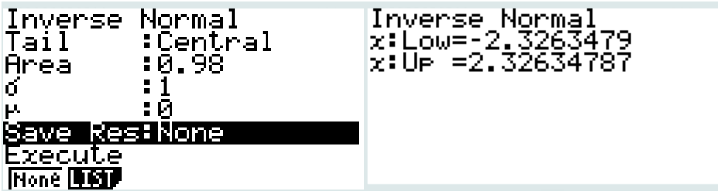
1. $p(0{,}9 \le X \le 1{,}1) = 0{,}93$ donc $P(B \cap V) = 0{,}93 \times 0{,}4 = 0{,}372$ ce qui est bien le même résultat qu'à la question a 2.



2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif ;

Soit $T = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$, T suit une loi normale centrée réduite

$P(0{,}9 \le Y \le 1{,}1) = 0{,}98 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{0{,}9-1}{\sigma'} \le T \le \dfrac{1{,}1-1}{\sigma'}\right) = P\left(\dfrac{0{,}1}{\sigma'} \le T \le \dfrac{-0{,}1}{\sigma'}\right) = 0{,}98$



donc $\dfrac{0{,}1}{\sigma'} = 2{,}233$ soit $\sigma' = \dfrac{0{,}1}{2{,}33} \approx 0{,}043$

Partie C

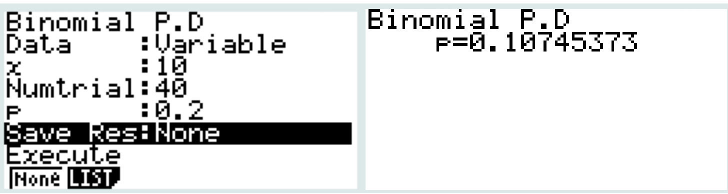
1. La machine teinte les billes de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge (il y a donc 5 couleurs possibles) donc la probabilité qu'une bille soit noire est 1/5 soit 0,2.

On a une succession de 40 expériences aléatoires indépendantes, chacune d'elle *a* deux issues :

- réussite : la bille est noire ($p = 0{,}2$)
- échec : la bille n'est pas noire ($q = 1 - p = 0{,}8$)

donc la variable aléatoire Z égale au nombre de billes noires obtenues, suit une loi binomiale de paramètres (40 ; 1/5)

a. $P(Z = 10) = 0{,}107$



b. $n = 40$, $p = 0{,}2$ donc $n\,p = 8$ donc $n\,p > 5$, $n\,(1-p) = 32$ donc $n\,(1-p) > 5$. Les conditions sont réunies pour utiliser un intervalle de fluctuation au risque 5 %

$I_{40} = \left[0{,}2 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}2 \times 0{,}8}{40}}\,;\,0{,}2 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}2 \times 0{,}8}{40}}\right]$ soit $I_{40} = [0{,}076 \,;\, 0{,}324]$.

La fréquence du nombre de boules noires dans l'échantillon est $f = \dfrac{12}{40} = 0{,}3$, $f \in I_{40}$ donc la machine qui teinte les billes est bien réglée.

2. « obtenir au moins une bille noire » est l'événement contraire de « ne pas obtenir de bille noire » donc $P = 1 - 0{,}8^n$

$1 - 0{,}8^n \ge 0{,}99$ donc $0{,}8^n \le 1 - 0{,}99$ soit $n \ln 0{,}8 \le \ln 0{,}01$ donc $n \ge \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}6$ donc $n \ge 27$

Le nombre minimal de billes que chaque sachet doit contenir pour atteindre cet objectif est de 27.