

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

### EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

*Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.*

#### Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2. a. Quelle est la probabilité de l'évènement  $B \cap \bar{S}$  ?

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.

Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

#### Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

#### Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.

On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

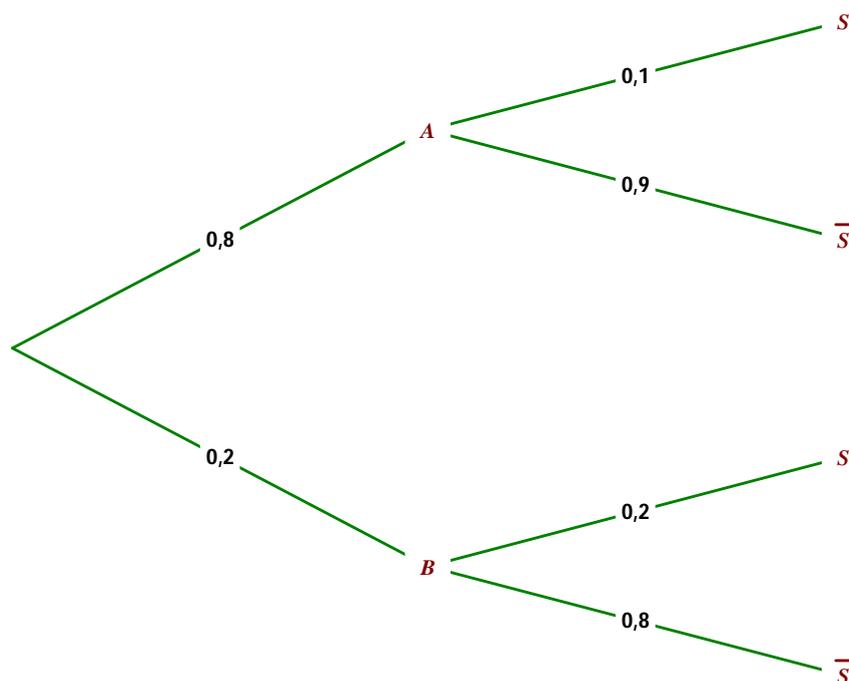
1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

### CORRECTION

#### Partie A

1.



2. a.  $P(B \cap \bar{S}) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$

b.  $P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S}) = 0,8 \times 0,9 + 0,16 = 0,88$

$$3. \quad P_s(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,2 \times 0,2}{1 - 0,88} = \frac{1}{3}$$

### Partie B

1. On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :  
réussite : la boîte est sans trace de pesticides ( $p = 0,88$ )  
échec : la boîte n'est pas sans trace de pesticides ( $q = 0,12$ )  
donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $(10 ; 0,88)$ .

2.  $P(X = 10) = 0,88^{10}$  soit environ 0,28
3.  $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$  soit environ 0,89 (on pouvait aussi dire que  $P(X \leq 8) = 1 - P(X \leq 7)$ )

### Partie C

1.  $n = 50$ ,  $np = 50 \times 0,88 = 44$  et  $n(1 - p) = 50 \times 0,12 = 6$  donc les conditions d'applications sont vérifiées

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire  $F$  au seuil de 95 % est :

$$\left[ 0,88 - 1,96 \sqrt{\frac{0,88 \times 0,12}{50}} ; 0,88 + 1,96 \sqrt{\frac{0,88 \times 0,12}{50}} \right] \text{ soit environ } [ 0,78 ; 0,98 ] \text{ (prendre une valeur approchée par défaut de la}$$

borne inférieure de l'intervalle et une valeur approchée par excès de la borne supérieure de l'intervalle).

2. Pour l'échantillon, la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides est  $f = 1 - \frac{12}{50} = 0,76$

$f \notin I_{50}$  et  $f < 0,78$ . L'échantillon n'est pas représentatif de ce qu'annonce le grossiste. L'inspecteur de la brigade de répression peut décider que la publicité est mensongère.