

EXERCICE 1 Commun à tous les candidats 7 points**PARTIE A : restitution organisée de connaissances**

On suppose connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$

❖ si pour tout $x \in [a ; b]$, $u(x) \geq 0$ alors $\int_a^b u(x) dx \geq 0$

❖ $\int_a^b [u(x) + v(x)] dx = \int_a^b u(x) dx + \int_a^b v(x) dx$

❖ a

❖ $\int_a^b \alpha u(x) dx = \alpha \int_a^b u(x) dx$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ et si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

b. Calculer $\varphi(e)$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1 ; e]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x .

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$. On note f' la fonction dérivée de f .

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(1+x^2)^2}$.

b. Dédire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$.

d. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$.

b. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f , dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. Déterminer un encadrement de $\mathcal{A}$.

EXERCICE 2 Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = \sqrt{3} + i$.

1. a. Écrire z_A , z_B et z_C sous forme exponentielle.

b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2. a. Écrire le quotient $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians.

a. Montrer que le point O', image de O par r , a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.

b. Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ .

c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .

d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4. a. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z| = |z + \sqrt{3} + i|$.

b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

EXERCICE 2 Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe $z' = (1 + i\sqrt{3}) \bar{z}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z .

Soient les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ et $z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

On note A' et B' les images respectives des points A et B par f .

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie.

Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. a. Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
c. En déduire la nature du triangle OA'B'.
d. Montrer que l'affixe $z_{A'}$ de A' vérifie l'égalité : $z_{A'} = 2 z_A$. En déduire la construction de A' et B'.
2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $(O; \vec{u})$. On pose $g = r \circ s$.
a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g .
b. Montrer que les points O et A sont invariants par g .
c. En déduire la nature de la transformation g .
3. a. Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
b. Sur la figure placée en ANNEXE, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation f .

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 4 points

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
a. Vérifier que $P(X = 0) = \frac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : *si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.*
a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :
B : « seule la première boule tirée est verte »,
C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

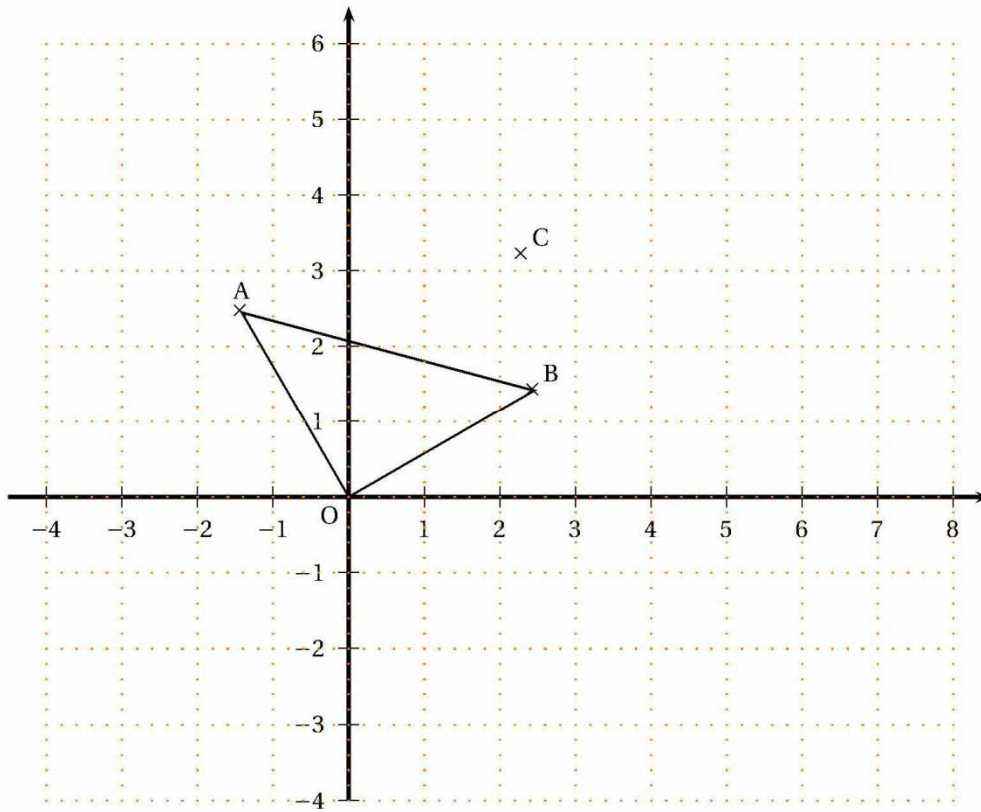
P est le plan passant par A (3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}(1; -4; 1)$;

D est la droite passant par B (1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 3)$.

S est la sphère de centre $\Omega(1; 9; 0)$ passant par A.

1. Intersection du plan P et de la droite D.
a. Démontrer que le plan P a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$.
b. Montrer que la droite D est strictement parallèle au plan P.
2. Intersection du plan P et de la sphère S.
a. Calculer la distance d du point Ω au plan P.
b. Calculer le rayon de la sphère S. En déduire l'intersection du plan P et de la sphère S.
3. Intersection de la droite D et de la sphère S.
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.
b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère S.
c. En déduire que la droite D coupe la sphère S en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

ANNEXE
EXERCICE 2
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie



CORRECTION

EXERCICE 1

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$ et pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors : $g(x) - f(x) \geq 0$, $g - f$

étant continue sur $[a; b]$ et $a < b$ donc $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$ soit $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$

donc $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

PARTIE B :

1. a. $\varphi'(x) = 2x - 2 \left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) = 2x - 2(2x \ln x + x)$ donc $\varphi'(x) = -4x \ln x$

Pour tout x de $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$ donc $\varphi'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$, et $\varphi(1) = 0$

φ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

b. $\varphi(e) = 1 + e^2 - 2e^2 \ln e$ or $\ln e = 1$ donc $\varphi(e) = 1 - e^2$, $\varphi(1) = 2$,

φ est définie continue strictement décroissante sur $]1; e]$ et $\varphi([1; e]) = [1 - e^2; 2]$

$0 \in [1 - e^2; 2]$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; e]$.

$\varphi(1,8) \approx 0,431$ et $\varphi(1,9) \approx -0,024$ donc φ s'annule dans $[1,8; 1,9]$ donc $1,8 \leq \alpha \leq 1,9$

c. φ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ et $\varphi(\alpha) = 0$ donc si $1 \leq x < \alpha$ alors $\varphi(x) > 0$

si $x = \alpha$ alors $\varphi(x) = 0$

si $\alpha < x$ alors $\varphi(x) < 0$

2. a. pour tout $x \geq 1$ on a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1+x^2) - 2x \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}$ donc $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(1+x^2)^2}$.

b. $x \geq 1$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$

x	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$f(\alpha)$	

c. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$ on a : $1+x^2 \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

$x \geq 1$ donc $\ln x \geq 0$ donc $0 \leq \frac{\ln x}{1+x^2} \leq \frac{\ln x}{x^2}$ soit $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$.

d. $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ d'après le théorème de comparaison.

3. a. Soit $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ alors $u(x) = -\frac{1}{x}$
soit $v(x) = \ln x$ alors $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \left[\frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = 1 - \frac{2}{e}.$$

b. En unité d'aire, $\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx$

Pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$ on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$ donc les fonctions étant continues sur $]1; +\infty[$,

$$0 \leq \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx, \text{ soit } 0 \leq \mathcal{A} \leq 1 - \frac{2}{e}.$$

L'unité graphique 1 cm donc 1 unité d'aire est 1 cm^2 donc $0 \leq \mathcal{A} \leq 0,265$.

EXERCICE 2

1. a. $z_A = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

$$|z_B| = \sqrt{3+1} = 2 \text{ donc } z_B = 2(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ donc } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ soit } \theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ donc } z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$|z_C| = \sqrt{3+1} = 2 \text{ donc } z_C = 2(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ donc } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ soit } \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ donc } z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

b. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ donc $OA = OB = OC$; Γ est le cercle de centre O de rayon 2.

2. a. $z_B - z_A = -\sqrt{3} + i + 2i = -\sqrt{3} + 3i = \sqrt{3}(-1 + \sqrt{3}i)$

$z_B - z_A = \sqrt{3} + i + 2i = \sqrt{3} + 3i = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{-1+2i\sqrt{3}+3}{4} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\begin{cases} \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ soit $\begin{cases} AB = AC \\ (\overline{AC}, \overline{AB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Le triangle ABC est équilatéral indirect.

3. a. r a pour expression complexe $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$ soit $z' + 2i = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z + 2i)$

$z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} - i$ donc le point O' , image de O par r , a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.

b. Le milieu de $[CO']$ est le point d'affixe $z = \frac{z_C + z_{O'}}{2} = 0$ donc est le point O.

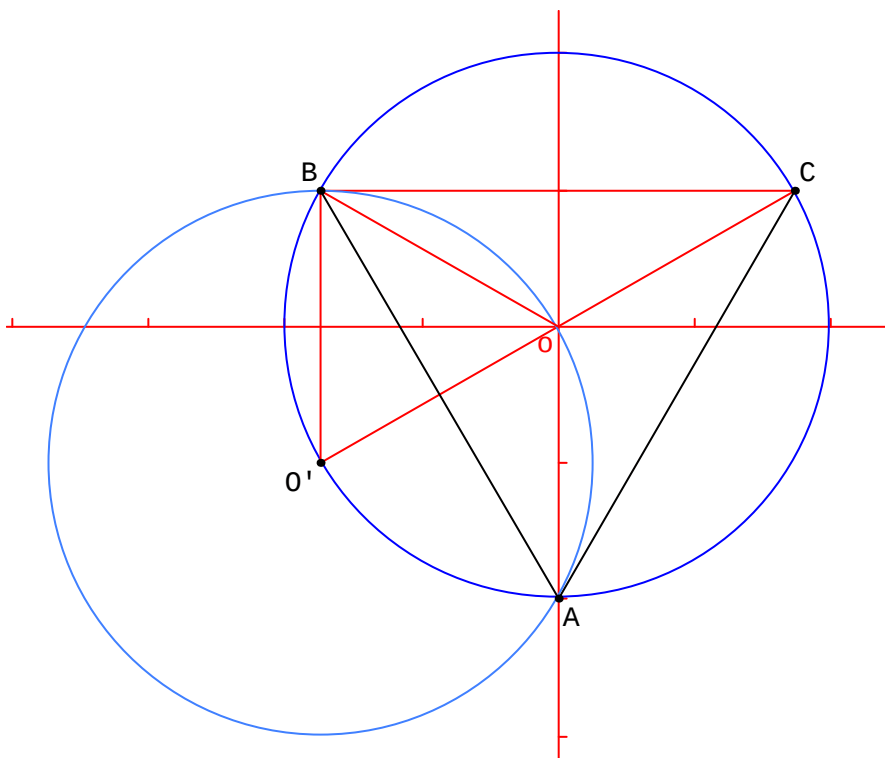
C appartient à Γ donc les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ .

c. Une rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon de centre image du centre initial.

d. Le triangle ABC est équilatéral de centre O donc (OC) est médiatrice de [AB] or O' appartient à (OC) donc $O'A = O'B$
Le triangle $O'BC$ est rectangle en B et O est le milieu de $[O'C]$ donc $OC = OB = O'O$
donc $OO' = O'A = O'B = 2$ donc A et B appartiennent au cercle Γ' , les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4. a. $|z| = |z + \sqrt{3} + i| \Leftrightarrow OM = O'M \Leftrightarrow M$ décrit la médiatrice de $[OO']$.

b. $O'A = O'B$ de plus $OA = OB$ donc les points A et B appartiennent à la médiatrice de $[OO']$ donc à (E).



EXERCICE 2 Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité 5 points

1. a. $z_A = \sqrt{6} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + i)$

$$|z_A| = \sqrt{2} |\sqrt{3} + i| = \sqrt{2} \sqrt{3+1} = 2\sqrt{2} \text{ donc } z_A = 2\sqrt{2} (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ donc } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ soit } \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

donc $z_A = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{6} = \sqrt{2}(-1 + i\sqrt{3})$

$$|z_B| = \sqrt{2} \sqrt{3+1} = 2\sqrt{2} \text{ donc } z_B = 2\sqrt{2} (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ donc } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ soit } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ donc } z_B = 2\sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$k \in \mathbb{Z}$

b. $z_A = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $OA = 2\sqrt{2}$.

$z_B = 2\sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $OB = 2\sqrt{2}$ donc le triangle OAB est isocèle.

$(\overline{OA}, \overline{OB}) = \arg(z_B) - \arg(z_A)$

$(\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ donc } (\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$

Le triangle OAB est rectangle en O, isocèle et direct.

c. $f(O) = O, f(A) = A' \text{ et } f(B) = B'$

f a une expression complexe de la forme $z' = a \bar{z}$ donc est une similitude indirecte donc transforme le triangle OAB rectangle isocèle et direct en le triangle OA'B' triangle rectangle en O, isocèle et indirect.

d. $z'_A = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}i)$ donc l'affixe z'_A de A' vérifie l'égalité : $z'_A = 2z_A$.

$z'_A = 2z_A$ donc $\overline{OA'} = 2\overline{OA}$ donc A' est le symétrique de O par rapport à A

Le triangle OA'B' est rectangle en O, isocèle et indirect donc B' est un point du cercle de centre O de rayon OA' et de la perpendiculaire en O à (OA'), la droite et le cercle se coupent en deux points, pour l'un d'eux seulement le triangle OA'B' est rectangle en O, isocèle et indirect.

2. a. r a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$, soit $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$,

s est la symétrie orthogonale d'axe (O ; $\vec{u}$), donc a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$ donc

$M(z) \xrightarrow{s} M_1(z_1 = \bar{z}) \xrightarrow{r} M'(z')$ avec $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$

donc g a pour écriture complexe $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$

b. g a pour écriture complexe $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$ donc si $z = 0$ alors $z' = 0$ soit $g(O) = O$

si $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ alors $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i + 3i + \sqrt{3}) = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

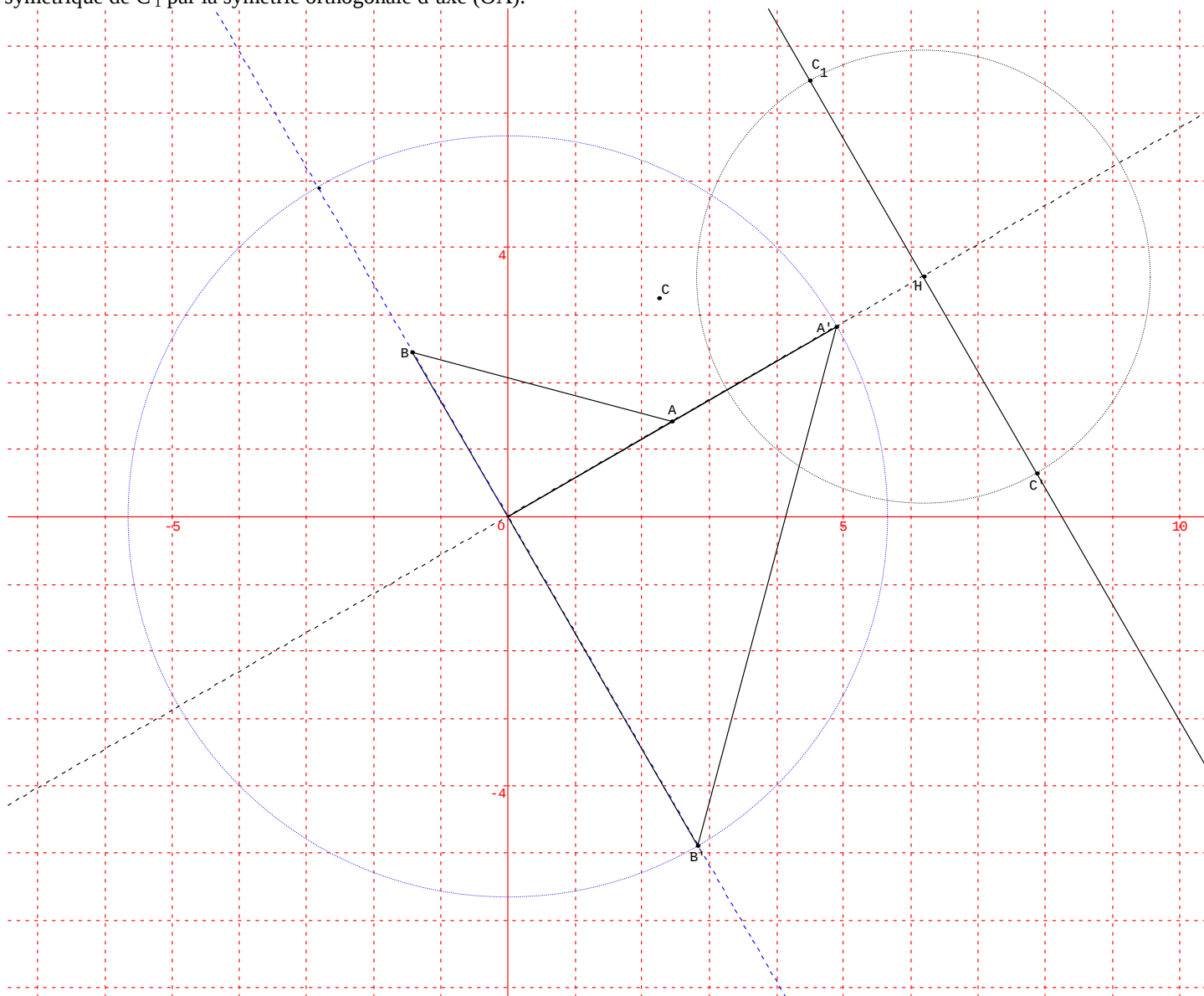
soit $g(A) = A$, les points O et A sont invariants par g .

c. g est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte donc g est une similitude indirecte, le rapport de g est

$\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ et g admet deux points invariants O et A donc g est la symétrie orthogonale d'axe (OA)

3. a. L'écriture complexe de f est $z' = (1 + i\sqrt{3}) \bar{z}$, celle de g est $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \bar{z}$ donc si h est l'homothétie de centre O de rapport 2, $M(z) \xrightarrow{h} M_1(z_1 = 2z) \xrightarrow{g} M'(z')$ avec $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z = (1 + i\sqrt{3}) \bar{z}$, donc $f = h \circ g$

b. Soit C_1 l'image de C par h , C_1 vérifie : $\overrightarrow{OC_1} = 2\overrightarrow{OC}$ donc C_1 est le symétrique de O par rapport à C , $C' = g(C_1)$ est le symétrique de C_1 par la symétrie orthogonale d'axe (OA) .



EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 4 points

1. a. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne., donc les tirages sont équiprobables ;

le nombre de cas possibles est $\binom{2}{5} = 10$, obtenir 0 boules vertes est le même événement qu'obtenir deux boules rouges choisies

parmi les 3 donc le nombre de cas favorables est $\binom{2}{3} = 3$ donc $P(X = 0) = \frac{3}{10}$

$$P(X = 2) = \frac{1}{\binom{2}{5}} = \frac{1}{10} ; p(X = 1) = \frac{\binom{1}{3}\binom{1}{2}}{\binom{2}{5}} = \frac{6}{10}$$

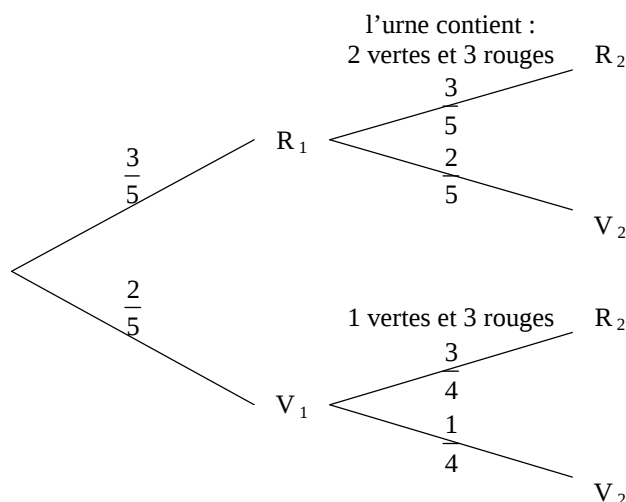
b. $E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = 0,8$

c. A : « les deux boules tirées sont de même couleur » se décompose en deux cas : « obtenir deux boules rouges » ou « obtenir deux boules vertes » donc $P(A) = P(X = 0) + P(X = 2) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 0,4$

On pouvait aussi dire que $\bar{A}$ est l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes » $P(\bar{A}) = P(X = 1) = \frac{6}{10} = 0,6$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,4$$

2.



a. $P(B) = P(V_1 \cap R_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

$$P(C) = P(V_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap V_2) = \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 0,54$$

b. $P_c(V_1) = \frac{P(C \cap V_1)}{P(C)} = \frac{P(R_2 \cap V_1)}{P(C)} = \frac{0,3}{0,54} = \frac{5}{9}$

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

P est le plan passant par A (3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}(1 ; -4 ; 1)$;

D est la droite passant par B (1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 1 ; 3)$.

S est la sphère de centre $\Omega(1 ; 9 ; 0)$ passant par A.

1. a. P est le plan de vecteur normal $\vec{n}(1 ; -4 ; 1)$ donc P a une équation cartésienne de la forme $x - 4y + z + d = 0$
P passe par A (3 ; 1 ; 2) donc $3 - 4 + 2 + d = 0$ donc $d = -1$, le plan P a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$.

b. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 - 4 + 3 = 0$ donc D est parallèle à P donc soit D est entièrement contenue dans P, soit elle est strictement parallèle au plan P.

D est la droite passant par B (1 ; 4 ; 2) or $1 - 4 \times 4 + 2 - 1 \neq 0$ donc B n'appartient pas à P donc la droite D est strictement parallèle au plan P.

2. a.
$$d = \frac{|1 - 4 \times 9 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{36}{\sqrt{18}} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}.$$

b. Le rayon de la sphère S est ΩA .

$$\Omega A^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 9)^2 + 2^2 = 4 + 64 + 4 = 72 \text{ donc } \Omega A = 6\sqrt{2}$$

$\Omega A = d$ donc le plan P est tangent à la sphère S, l'intersection du plan P et de la sphère S est réduite à un point.

A appartient à P et à S donc $P \cap S = \{A\}$.

3. a. $\vec{u}(1 ; 1 ; 3)$ est un vecteur directeur de D et B appartient à D donc une représentation paramétrique de la droite D est

$$\begin{cases} x = x_B + k \\ y = y_B + k \\ z = z_B + 3k \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 4 + k \\ z = 2 + 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

b. S est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = \Omega A$ soit $\Omega M^2 = 72$ donc $(x - 1)^2 + (y - 9)^2 + z^2 = 72$

Une équation cartésienne de la sphère S est $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 18y + 10 = 0$

c. Soit M un point d'intersection de D et S, $M \in D$ donc il existe un réel k tel que les coordonnées de M soient
$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 4 + k \\ z = 2 + 3k \end{cases}$$

$M \in S$ donc ses coordonnées vérifient $(x - 1)^2 + (y - 9)^2 + z^2 = 72$ soit $k^2 + (k - 5)^2 + (2 + 3k)^2 = 72$

$$k^2 + k^2 - 10k + 25 + 4 + 12k + 9k^2 = 72$$

$$11k^2 + 2k - 43 = 0$$

$\Delta = 4 + 4 \times 11 \times 43$ donc $\Delta > 0$ donc l'équation $11k^2 + 2k - 43 = 0$ admet deux solutions distinctes donc la droite D coupe la sphère S en deux points M et N distincts.