Antilles–Guyane septembre 2012
EXERCICE 1

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace.

On note D la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Soit P le plan défini par l'équation $x + y + 2z - 1 = 0$.
Soit S la sphère de centre B $(1 ; -1 ; 0)$ et de rayon 1.

Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix.
Il est attribué pour chaque question 0,5 *point si la réponse est exacte et* 0,5 *point si la justification est correcte.*

1. La droite D et le plan P sont :
a. parallèles ;
b. perpendiculaires ;
c. non parallèles et non perpendiculaires.

2. Soit P ′ le plan contenant la droite D et perpendiculaire au plan P. P ′ admet pour équation cartésienne :
a. $-2y + z + 2 = 0$;
b. $2x - z = 0$;
c. $x - y - z = 0$.

3. La droite Δ, intersection du plan P et du plan d'équation $2x - z = 0$, admet pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

b. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -5t + 1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

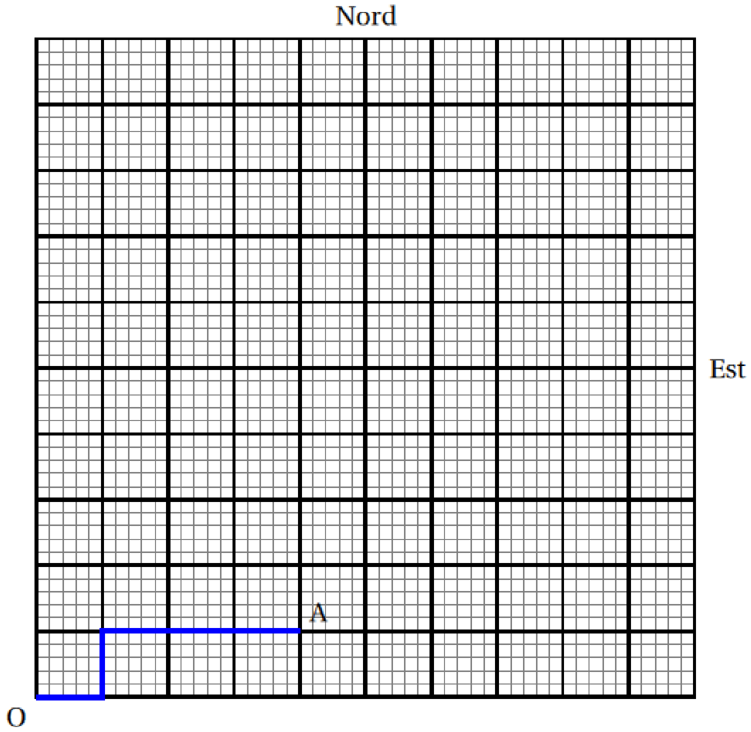
c. $\begin{cases} x = t \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

4. L'intersection de la sphère S et du plan P est :
a. un point ;
b. l'ensemble vide ;
c. un cercle.

EXERCICE 2

Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les pâtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires.

On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées (0 ; 0), le point A a pour coordonnées (4 ; 1).

On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées $(p\ ;\ q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leq 10$ et $q \leq 10$.

À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.

On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.

Par exemple : Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A - Dénombrement

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.

2. Soit M un point de coordonnées $(p\ ;\ q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leq 10$ et $q \leq 10$.

Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M.

3. Montrer qu'il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.

4. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées (7 ; 5).

5. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :

- ils sont de longueur 5 ;
- un promeneur part de O et à chaque intersection la probabilité qu'il aille vers le Nord est de $\frac{2}{3}$ (et donc de $\frac{1}{3}$ vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.

On appelle X la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

1. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.

2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

3. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.

EXERCICE 3 Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \sqrt{3} + \text{i}\,;\; z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}\,;\; z_{\text{C}} = -1 - 3\,\text{i}.$$

On note D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

On note E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{OC}}$.

1. *a.* Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

b. Sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 2 cm, placer les points A et B et C.

c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. *a.* Construire les points D et E. Calculer leurs affixes z_{D} et z_{E}

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OE}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\overrightarrow{\text{AD}}$ sont orthogonaux et que OE = AD.

3. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent dans un cas plus général. Il est inutile de refaire une figure.

Soient A, B, C, D et E les points- d'affixes respectives non nulles z_{A}, z_{B}, z_{C}, z_{D} et z_{E} tels que :

- le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec $(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}) = \frac{\pi}{2}$;
- le triangle OCD est rectangle isocèle en O avec $(\overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OD}}) = \frac{\pi}{2}$;
- Le quadrilatère OBEC est un parallélogramme.

a. Justifier les égalités suivantes :

$$z_{\text{B}} = \text{i}\,z_{\text{A}}\,;\; z_{\text{D}} = \text{i}\,z_{\text{C}}\,;\; z_{\text{E}} = \text{i}\,z_{\text{A}} + z_{\text{C}}$$

b. Montrer que : $\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}} = \text{i}$.

c. Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}}\right)$ puis conclure.

EXERCICE 3 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On tracera la figure sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 1 cm.

Partie A : tracé d'une figure

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = -2-4\,i\ ;\ z_B = -6\,i\ ;\ z_C = 3-3\,i.$$

1. Placer le point D tel que le triangle ABD est isocèle rectangle en D, avec $(\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Construire le point E tel que le triangle OEA est isocèle rectangle en E avec $(\overrightarrow{EA}\,,\overrightarrow{EO}) = \frac{\pi}{2}$.

3. Vérifier que l'affixe du point D est $z_D = -4\,i$.

Le but de l'exercice est de montrer de deux manières que les droites (ED) et (BC) sont perpendiculaires et que les distances ED et BC sont égales.

Partie B : première méthode

1. Soit g la similitude directe de centre A qui transforme B en D.

a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude g.

b. En déduire que l'écriture complexe de g est :

$$z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i\right)z-3-i.$$

c. Justifier que le point E est l'image du point O par la similitude g.

d. En déduire l'affixe du point E.

2. Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_B - z_C}{z_E - z_D}$ et conclure pour le problème posé.

Partie C : deuxième méthode

1. On considère la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Quelle est l'image du point O par cette rotation ? Justifier la réponse.

En déduire la nature du triangle OBC.

2. Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Soit h la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Donner l'angle et le rapport de la similitude $h \circ f$.

b. Quelle est l'image de la droite (BC) par $h \circ f$? Justifier.

c. Conclure pour le problème posé.

Exercice 4 Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe C représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation $y=x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En déduire que si $x>\mathrm{e}$ alors $f(x)>\mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.

Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n>\mathrm{e}$.

b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

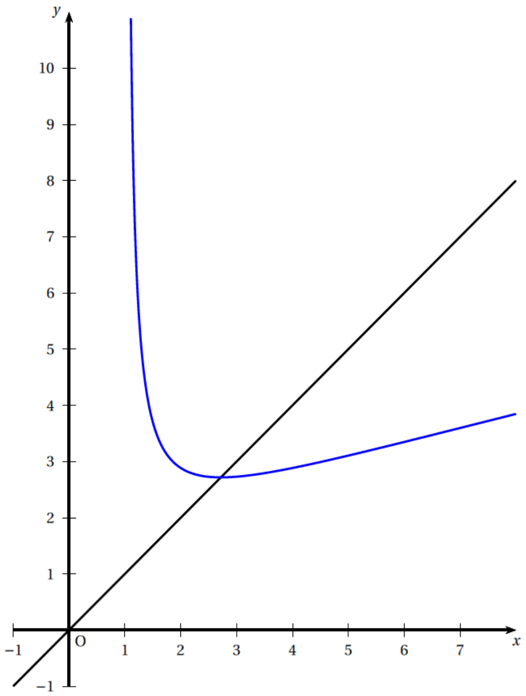
```
X est une variable réelle ;
Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
        Faire
            Affecter (X/lnX) à X
            Affecter Y +1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	u_n
0	5
1	3,106 674 672 8
2	2,740 652 532 3
3	2,718 372 634 6
4	2,718 281 830 01
5	2,718 281 828 5

ANNEXE

Exercice 4 Commun à tous les candidats



CORRECTION

EXERCICE 1

1. Réponse ***c.***

Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 2)

Un vecteur directeur de D est le vecteur $\vec{u}$ (1 ; – 1 ; 2)

$\vec{n}\,.\,\vec{u} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times 2$ donc $\vec{n}\,.\,\vec{u} = 4$

$\vec{n}\,.\,\vec{u} \neq 0$ donc la droite D n'est pas parallèle au plan P

$\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc la droite D n'est pas perpendiculaire au plan P

La droite D et le plan P sont non parallèles et non perpendiculaires.

2. Réponse ***b.***

a. $-2y + z + 2 = 0$;

La droite D passe par l'origine du repère et est contenue dans P or O n'appartient pas au plan d'équation $-2y + z + 2 = 0$ donc réponse fausse.

b. La droite D passe par l'origine du repère et par le point A (1 ; – 1 ; 2)

Les coordonnées de O et de A vérifient l'équation $2x - z = 0$ donc la droite D est contenue dans le plan d'équation $2x - z = 0$.

Un vecteur normal au plan d'équation $2x - z = 0$ est le vecteur $\overrightarrow{n'}$ (2 ; 0 ; – 1)

$\overrightarrow{n'}\,.\,\vec{n} = 2 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times 2$ donc $\overrightarrow{n'}\,.\,\vec{n} = 0$

Le plan d'équation $2x - z = 0$ contient la droite D, et est perpendiculaire au plan P donc une équation de P ' est $2x - z = 0$;

c. Soit P" le plan d'équation $x - y - z = 0$.

La droite D passe par l'origine du repère et par le point A (1 ; – 1 ; 2)

Les coordonnées de O et de A vérifient l'équation $x - y - z = 0$ donc la droite D est contenue dans le plan P".

Le vecteur $\overrightarrow{n''}$(1 ; – 1 ; – 1) est un vecteur normal au plan P".

$\overrightarrow{n''}\,.\,\vec{n} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + (-1) \times 2$ donc $\overrightarrow{n'}\,.\,\vec{n} = -2$

Le plan d'équation $x - y - z = 0$ contient la droite D, et n'est pas perpendiculaire au plan P.

3. Réponse ***c.***

a. Le point de la droite de paramètre 1 est A (1 ; – 2 ; 2) n'appartient pas à P ($1 - 2 + 2 \times 2 - 1 \neq 0$) donc cette droite n'est pas l'intersection du plan P et du plan P'.

b. Le point de la droite de paramètre 1 est A (1 ; – 1 ; – 4) n'appartient pas à P ($1 - 1 + 2 \times (-4) - 1 \neq 0$) donc cette droite n'est pas l'intersection du plan P et du plan P'.

c. Le point de la droite de paramètre 1 est A (1 ; – 4 ; 2)

A appartient à P ($1 - 4 + 2 \times 2 - 1 = 0$) et à P' ($2 \times 1 - 2 = 0$) donc A appartient à l'intersection du plan P et du plan P'.

Le point de la droite de paramètre 0 est B (0 ; 1 ; 0)

B appartient à P ($0 + 1 + 2 \times 0 - 1 = 0$) et à P' ($2 \times 0 - 0 = 0$) donc B appartient à l'intersection du plan P et du plan P'.

L'intersection des plans P et P' est la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

4. Réponse ***c.***

Soit P le plan défini par l'équation $x + y + 2z - 1 = 0$.

Soit S la sphère de centre B (1 ; − 1 ; 0) et de rayon 1.

La distance du centre de la sphère au plan P est d

$$d = \frac{|1 - 1 + 2 \times 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\frac{1}{\sqrt{6}} < 1$ donc l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle.

EXERCICE 2

Partie A - Dénombrement

1. La liste de tous les chemins permettant de se rendre en A est :

NEEEE ; ENEEE ; EENEE ; EEENE ; EEEEN

2. Pour aller de O à M il faut effectuer p trajets vers le Nord et q trajets vers l'Est donc la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M est $p + q$

3. Pour dénombrer les chemins, il faut choisir parmi les $p + q$ déplacements (soit vers le Nord soit vers l'Est) l'ordre des p déplacements vers le Nord donc il y a $\begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.

4. Il y a $\begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.

donc il y a $\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix} = 792$ chemins différents qui permettent d'arriver en C.

5. Il faut aller de O à A, il y a donc 5 chemins différents qui permettent d'arriver en A.

Pour aller de A à C, le nombre de chemins sera le même que pour aller de O à B (3 ; 4) il y a donc $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35$ chemins possibles pour aller de A à C donc il y a $5 \times 35 = 175$ chemins pour arriver en C en passant par A.

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

1. A(0 ; 5) B(1 ;4) C(2 ;3) D (3,2) E(4 ;1) F(5 ; 0)

2. On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes (le promeneur se déplace soit vers le Nord soit vers l'Est)

Chaque expérience a deux issues :

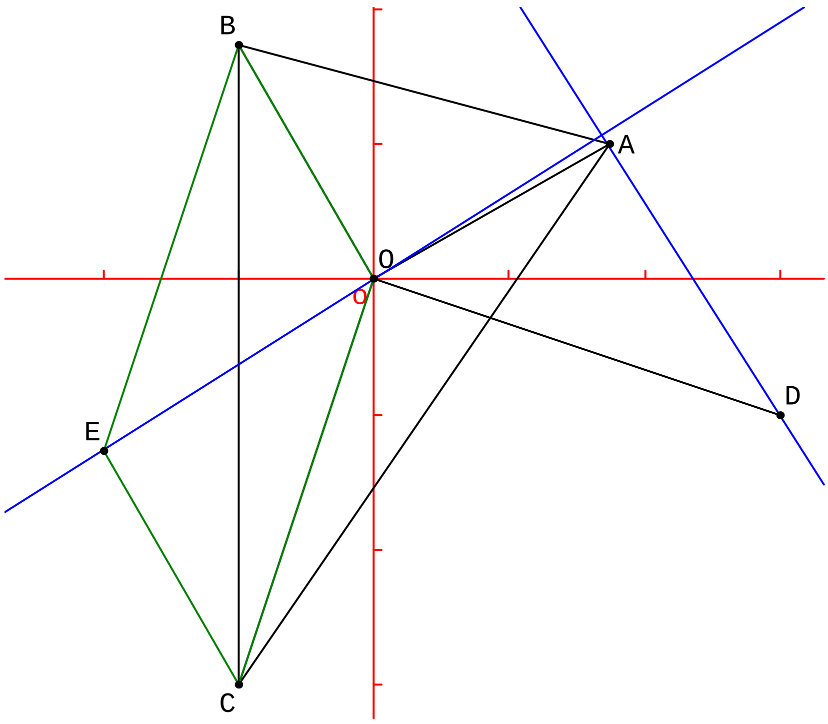
réussite : le promeneur va vers le Nord avec une probabilité $p = \frac{2}{3}$,

échec : le promeneur ne va pas vers le Nord avec une probabilité $q = 1 - p$ donc $q = \frac{1}{3}$,

donc la variable aléatoire X qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord, suit une loi binomiale de paramètres $\left(5 ; \frac{2}{3}\right)$.

3. le promeneur arrive en A s'il se déplace une seule fois vers le Nord donc $p(\mathrm{X} = 1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$ soit environ 0,041

EXERCICE 3 Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1. *a.* $|z_A| = 2$ et $z_A = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)$

$z_A = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc $z_A = 2\ e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$|z_b| = 2$ et $z_B = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_B = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ donc $z_B = 2\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

c. $OA^2 = |z_A|^2 = 4$

$OB^2 = |z_B|^2 = 4$ donc OA = OB, le triangle OAB est isocèle.

$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |-1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})|^2$

$AB^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 8$

$AB^2 = OA^2 + OB^2$ donc le triangle OAB est rectangle isocèle.

Autre solution :

La rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ soit $z' = i\,z$

$i\,z_A = i(\sqrt{3} + i) = -1 + i\sqrt{3} = z_B$ donc B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. *a.* D l'image du point C par la rotation de centre O d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ donc $z_D = i\,z_C$ donc $z_D = 3 - i$.

E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OC}$ soit $z_E - z_B = z_C$ donc $z_E = z_B + z_C$ soit $z_E = = -2 + i(\sqrt{3} - 3)$.

b. $\overrightarrow{AD}$ a pour affixe $z_D - z_A = 3 - i - (\sqrt{3} + i)$ soit $3 - \sqrt{3} - 2i$

$\overrightarrow{OE}$ a pour affixe $-2 + i(\sqrt{3} - 3)$.

$\overrightarrow{OE}\,.\,\overrightarrow{AD} = -2 \times (3 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 3) \times (-2) = 0$

$\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux

$OE^2 = |-2 + i(\sqrt{3} - 3)|^2 = 4 + (\sqrt{3} - 3)^2$ et $AD^2 = (3 - \sqrt{3})^2 + 4$ donc $AD^2 = OE^2$ soit AD = OE

3. *a.* le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

La rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ soit $z' = i\,z$ donc $z_B = i\,z_A$.

le triangle OCD est rectangle isocèle en O avec $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2}$; donc D est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ donc $z_D = i\,z_C$;

Le quadrilatère OBEC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CE}$, donc $z_E - z_C = z_B$ soit $z_E = z_B + z_C$ or $z_B = i\,z_A$ donc $z_E = i\,z_A + z_C$

b. $z_D - z_A = i\,z_C - z_A = i(z_C + i\,z_A) = i\,z_E$ donc $\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = i$.

c. $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right| = \dfrac{AD}{OE}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AD})$ donc $\dfrac{AD}{OE} = 1$ et $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et AD = OE

EXERCICE 3 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

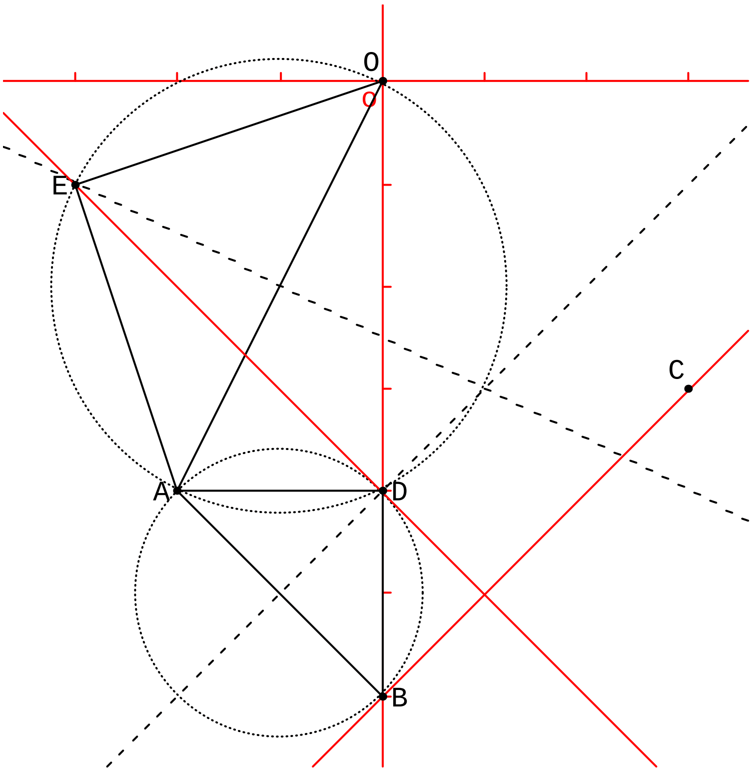
Partie A : tracé d'une figure

1. Le triangle ABD est isocèle rectangle en D, donc D appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] et à la médiatrice Δ de [AB]

$\mathcal{C}$ et Δ se coupent en deux points D et D', un seul de ces deux points vérifie $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Le triangle OEA est isocèle rectangle en E, donc E appartient au cercle $\mathcal{C}$'' de diamètre [OA] et à la médiatrice Δ' de [OA]

$\mathcal{C}$''et Δ' se coupent en deux points E et E', un seul de ces deux points vérifie $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EO}) = \frac{\pi}{2}$.



3. Soit le point M d'affixe – 4 i.

$\overrightarrow{AM}$ a pour affixe 2 donc a pour coordonnées (2 ; 0) et $\overrightarrow{BM}$ a pour affixe 2 i donc a pour coordonnées (0 ; 2).

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 2 \times 0 + 0 \times 2 = 0$ donc le triangle ABM est rectangle en A, et AM = BM = 2 donc le triangle ABM est rectangle isocèle en M donc M = D.

Partie B : première méthode

1. *a*. L'angle de la similitude directe de centre A qui transforme B en D est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Le triangle ABD est rectangle isocèle en D et direct donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$.

Le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en D est $\frac{AD}{AB}$.

Le triangle ABD est rectangle isocèle en D donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = 2\,AD^2$ soit $AB = \sqrt{2}\,AD$ donc $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

g est la similitude directe de centre A de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b. l'écriture complexe de *g* est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{4}$

donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ soit $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ donc $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z + b$

A est le centre de *g* donc $z_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) z_A + b$

$-2 - 4\mathrm{i} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(-2 - 4\mathrm{i}) + b \Leftrightarrow -2 - 4\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(-1 - 2\mathrm{i}) + b \Leftrightarrow -2 - 4\mathrm{i} = -1 - \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2 + b \Leftrightarrow -2 - 4\mathrm{i} = 1 - 3\mathrm{i} + b$

$\Leftrightarrow -3 - \mathrm{i} = b$

L'écriture complexe de g est de la forme $z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z - 3 - \mathrm{i}$.

c. Le triangle OAE est rectangle isocèle en E et direct donc $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{4}$.

Le triangle OAE est rectangle isocèle en E donc d'après le théorème de Pythagore, $AO^2 = 2\,AE^2$ soit $AO = \sqrt{2}\,AE$ donc $\frac{AE}{AO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

.

$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{AE}{AO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc E est l'image de O par la similitude directe de centre A de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

d. L'image du point O par la similitude g est le point E d'affixe $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) \times 0 - 3 - \mathrm{i}$ soit $-3-\mathrm{i}$

donc l'affixe du point E est $-3-\mathrm{i}$.

2. $z_B - z_C = -6\mathrm{i} - (3 - 3\mathrm{i}) = -3 - 3\mathrm{i}$
$z_E - z_D = -3 - \mathrm{i} - (-4\mathrm{i}) = -3 + 3\mathrm{i}$
$\frac{z_B - z_C}{z_E - z_D} = \frac{-3-3\mathrm{i}}{-3+3\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

Le module $\frac{z_B - z_C}{z_E - z_D}$ est 1 et un argument de $\frac{z_B - z_C}{z_E - z_D}$ est $\frac{\pi}{2}$ donc BC = DE et $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$.
Les droites (ED) et (BC) sont perpendiculaires et que les distances ED et BC sont égales.

Partie C : deuxième méthode

1. La rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe : $z' - z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_C)$
soit $z' = \mathrm{i}z - \mathrm{i}(3 - 3\mathrm{i}) + 3 - 3\mathrm{i}$ soit $z' = \mathrm{i}z - 3\mathrm{i} - 3 + 3 - 3\mathrm{i}$ soit $z' = \mathrm{i}z - 6\mathrm{i}$
L'image du point O par cette rotation est le point d'affixe $-6\mathrm{i}$ donc est le point B.
Le triangle OBC est donc rectangle isocèle en C et direct.

2.*a*. $h \circ f$ est la similitude directe de rapport $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit 1 et d'angle $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$ donc $\frac{\pi}{2}$. $h \circ f$ est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Si MNP est un triangle rectangle isocèle en M et direct alors la similitude de centre N de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ d'angle transforme P en M.
Si MNP est un triangle rectangle isocèle en M et direct alors la similitude de centre P de rapport $\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ d'angle transforme M en N.
en appliquant des résultats au triangle ABD puis au triangle OEA :
h est la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ le triangle ABD est rectangle isocèle direct en D donc h(B) = D.
$h \circ f\,(B) = h(B) = D$

Le triangle OBC est donc rectangle isocèle en C et direct donc f (C) = O
Le triangle OEA est isocèle rectangle en E et direct donc h(O) = E donc $h \circ f$ (C) = E
Une similitude directe transforme une droite en une droite donc $h \circ f$ transforme la droite (BC) en la droite (DE).

c. (BC) est transformée par la rotation $h \circ f$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ en une droite perpendiculaire à (BC) donc les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires
$h \circ f\,(B) = D$ et $h \circ f\,(C) = E$ donc BC = DE.

Exercice 4 Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ (résultat de cours) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

2. $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc $f'(x) = \dfrac{1 \times \ln x - \frac{1}{x} \times x}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$f'(x)$ a le même signe que $\ln x - 1$ or $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}$

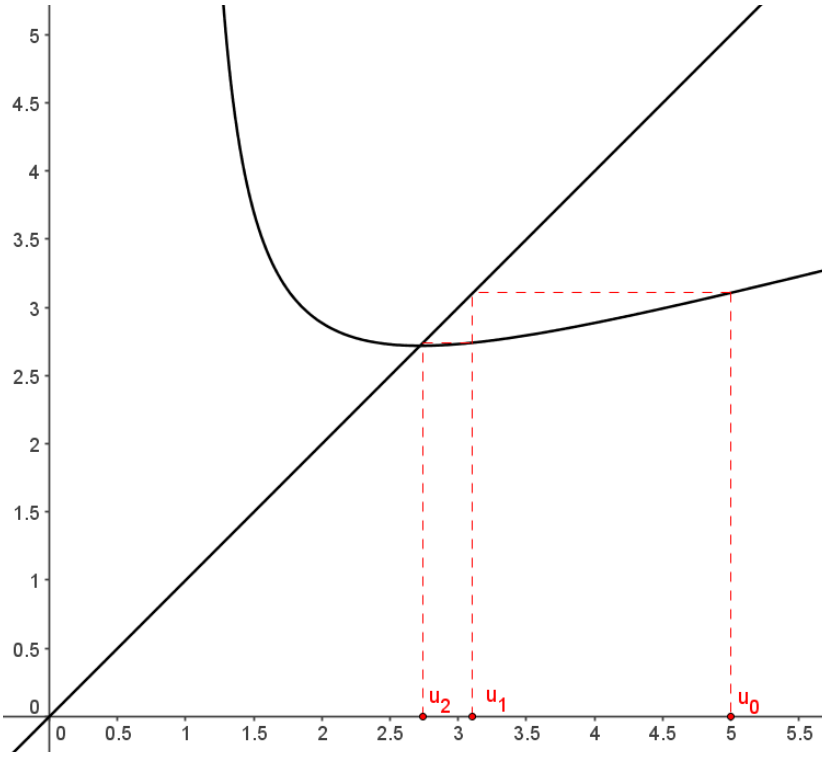
x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction f est strictement croissante sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$ donc si $x > \mathrm{e}$ alors $f(x) > f(\mathrm{e})$ soit $f(x) > \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1.



La suite semble être décroissante et converger vers e.

2. *a.* $u_0 = 5$ donc $u_0 > \mathrm{e}$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Montrons que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que pour tout n de N, si $u_n > \mathrm{e}$ alors $u_{n+1} > \mathrm{e}$

La fonction f est **strictement** croissante sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$ donc si $u_n > \mathrm{e}$ alors $f(u_{n+1}) > f(\mathrm{e})$ donc $u_{n+1} > \mathrm{e}$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n > \mathrm{e}$.

b. $u_1 = 5$ or $f(5) < 5$ donc $u_1 < u_0$,

Montrons que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que pour tout n de N, si $u_n < u_{n-1}$ alors $u_{n+1} < u_n$

La fonction f est **strictement** croissante sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$ donc si $u_n < u_{n-1}$ alors $f(u_n) < f(u_{n-1})$ donc $u_{n+1} < u_n$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par e donc converge et sa limite est supérieure ou égale à e.

d. $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n, $u_n \in\,]\,1\,;+\infty\,[$

f est continue sur $]\,1\,;+\infty\,[$ donc la limite ℓ est solution de $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow x > 1$ et $\dfrac{x}{\ln x} = x \Leftrightarrow x > 1$ et $x \ln x = x \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ donc $\ell = \mathrm{e}$.

3. En représentant l'action de l'algorithme dans un tableau :

X	Y	Test	algorithme
X = 5	0		
X = $f(5)$ or $f(5) = u_1$	1	$u_1 > 2,72$	continue
X = $f(u_1) = u_2$	2	$u_2 > 2,72$	continue
X = $f(u_2) = u_3$	3	$u_3 > 2,72$	continue
X = $f(u_3) = u_4$	4	$u_4 < 2,72$	Affiche 4

L'algorithme affiche 4