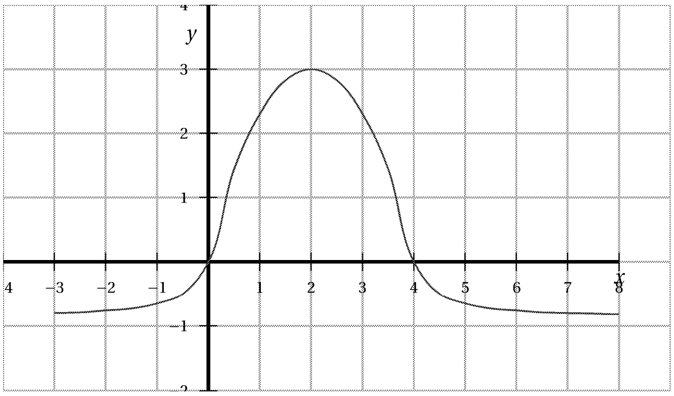
Antilles-Guyane septembre 2010

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle I = [− 3 ; 8].



On définit la fonction F sur I , par $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *a.* Que vaut F(0) ?

b. Donner le signe de F(x) :

- pour $x \in [0 ; 4]$;
- pour $x \in [-3 ; 0]$.

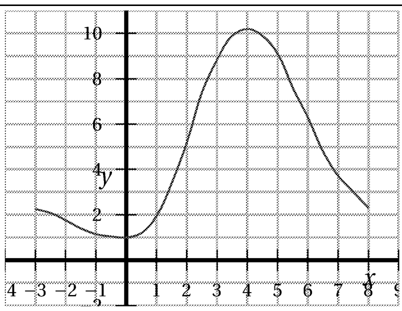
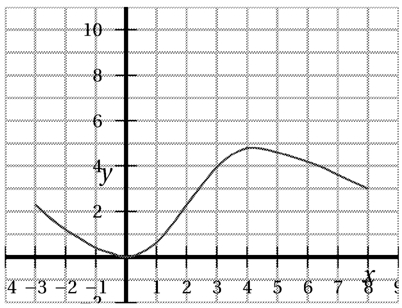
Justifier les réponses.

c. Faire figurer sur le graphique donné en ANNEXE les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leq F(4) \leq 12$.

2. *a.* Que représente f pour F ?

b. Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I . Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f .

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A	Courbe B
	

L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

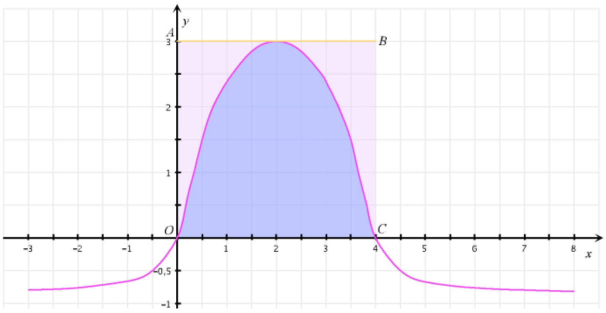
CORRECTION

1. *a*. F(0) = $\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

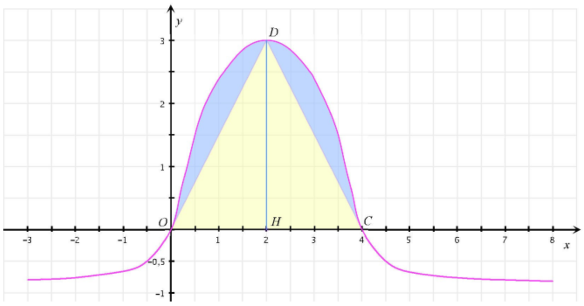
b. f est une fonction continue positive sur [0 ; 4] donc pour $x \in [0 ; 4]$; F(x) ≥ 0

f est une fonction continue négative sur [−3 ; 0].donc pour $\alpha \in [-3 ; 0]$; F(α) ≤ 0

c. f est une fonction continue positive sur [0 ; 4] donc F(4) mesure l'aire du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f , les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$, cette aire est inférieure à l'aire du rectangle OABC,
donc F(4) ≤ OA × AB, soit : F(4) ≤ 12.



l'aire F(4) est supérieure à celle du triangle ODC de hauteur
[DH] (en jaune sur la figure ci-dessous) donc F(4) ≥ $\frac{1}{2}$DH × OC
soit F(4) ≥ 6.



2. *a*. La fonction f est continue sur [− 3 ; 8], donc F : $x \longrightarrow \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur [− 3 ; 8] nulle en 0.

b. F est dérivable sur I et F'(x) = f (x), graphiquement, f (x) < 0 sur [– 3 ; 0 [; f (0) = 0 , f (x) > 0 sur] 0 ; 4 [f (4) = 0 et f (x) < 0 sur] 4 ; 8]

x	– 3		0		4		8
signe de F'(x) = f (x)		–	0	+	0	–	
variation de F	F(– 3)	↘	0	↗	F(4)	↘	F(8)

donc F est décroissante sur [– 3 ; 0 [; croissant sur [0 ; 4 [f (4) = 0 et décroissante sur [4 ; 8]

3. Les deux courbes satisfont aux sens de variation de F trouvé en 2 *b*. seule la courbe B satisfait à F(0) = 0.
D'autre part 6 ≤ F(4) ≤ 12 or pour la courbe B, F(4) < 6 donc aucune des deux courbe convient.