On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

On se propose d'établir que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

Partie A

1. Montrer que, pour tout réel t :

$$1 - t^2 + t^4 + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

2. En déduire que $u_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

3. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; 1], on a : $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$

En déduire que $\left| u_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \right| \leq \frac{1}{2n+3}$.

4. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Partie B Calcul de I= $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

On pose, pour tout x, F(x) = $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ et pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, $u(x)$ = F(tan x).

a. Montrer que u est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $u'(x)$

b. En déduire $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

CORRECTION

Partie A

1. Si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Soit $q = -t^2$, $q < 0$ donc $1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$

$1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} = \frac{1-(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$ or $(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1)^n = -(-1)^n$ donc

$1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} = \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$ soit $1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$

2. $\int_0^1 \left(1 - t^2 + t^4 + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

$\left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

soit $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$ donc $u_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

3. $0 \leq t \leq 1$ donc $1 \leq 1 + t^2 \leq 2$ soit $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

$t^{2n+2} \geq 0$ donc en multipliant l'inégalité précédente par t^{2n+2} on obtient que $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$

$$u_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

La fonction $t \to \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ est positive sur [0 ; 1], donc $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \geq 0$ donc $\left| u_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

pour tout réel t de [0 ; 1], on a : $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$ or $\displaystyle\int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+3}$ donc $\displaystyle\left| u_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2n+3}$.

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(u_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 0$ soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Partie B

a. La fonction $x \to \tan x$ est définie dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction F est la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \to \dfrac{1}{1+t^2}$, nulle en 0 donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

u est la composée de deux fonctions dérivables donc u est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

$u'(x) = F'(\tan x) \times (1 + \tan^2 x) = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} \times (1+\tan^2 x)$ donc $u'(x) = 1$.

b. Pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x + C$ (C constante réelle)

$u(0) = C = F(\tan 0) = F(0) = 0$ donc $u(x) = x$

$\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ donc $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$