(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n$.

1. Calculer les premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer une expression de $u_n - 1$ en fonction de n.

2. Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique.

3. En déduire que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence: $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

4. Démontrer par récurrence l'expression de u_n en fonction de n conjecturée à la première question.

CORRECTION

1. En remplaçant n par 0 dans $u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n$ on obtient que $u_{0+2} = 3\,u_1 - 2\,u_0 = 5$ donc $u_2 = 5$, on recommence pour n 1, 2 … 4 donc :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	3	5	9	17	33	65
$u_n - 1$	1	2	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	$32 = 2^5$	$64 = 2^6$

On peut donc émettre l'hypothèse que $u_n - 1 = 2^n$.

2. $v_{n+1} = u_{(n+1)+1} - u_{(n+1)} = u_{n+2} - u_{n+1}$ or $u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n$ donc en remplaçant :
$v_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n - u_{n+1} = 2\,u_{n+1} - 2\,u_n$.
$v_{n+2} = 2\,(u_{n+1} - u_n) = 2\,v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$, de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 3 - 2 = 1$
Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0\,q^n = 2^n$.

3. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1} - u_n = 2^n$ donc $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

4. Montrons par récurrence que pour tout entier n, $u_n = 1 + 2^n$
Initialisation : $u_0 = 2$ or $1 + 2^0 = 1 + 1 = 2$ donc $u_0 = 1 + 2^0$. La propriété est initialisée.

Hérédité : montrons pour tout entier n, que si $u_n = 1 + 2^n$ alors $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$.
$u_{n+1} = u_n + 2^n$ or par hypothèse de récurrence, $u_n = 1 + 2^n$ donc $u_{n+1} = 1 + 2^n + 2^n$
$u_{n+1} = 1 + 2 \times 2^n = 1 + 2^{n+1}$. La propriété est héréditaire
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, $u_n = 1 + 2^n$