

Antilles–Guyane juin 2005

$(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan P.

Soit A le point d'affixe 1; soit B le point d'affixe -1 .

Soit F l'application de P privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \frac{-1}{z}$

1. a. Soit E le point d'affixe $e = e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On note C_1 le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de C_1 par l'application F.

2. a. Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$ et K' l'image de K par F. Calculer l'affixe de K'.

b. Soit C_2 le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de C_2 par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$. R appartient au cercle C_3 de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z' + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{z}$.

En déduire que: $|z' + 1| = |z'|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a..

CORRECTION

1. a. $e' = \frac{-1}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{-1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$ donc $e' = -e^{-i\frac{\pi}{3}}$ Une forme exponentielle d'un complexe est $re^{i\theta}$ avec r réel, $r > 0$ donc ceci n'est pas la

forme exponentielle de e' . $-1 = e^{i\pi}$ donc $e' = -e^{i\pi} = e^{i\pi} e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i(\pi - \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Forme algébrique : $e' = -e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ donc $e' = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $M \in C_1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = 1$

or $|z'| = \left| \frac{1}{z} \right|$ donc $M \in C_1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow OM' = 1 \Leftrightarrow M' \in C_1$, C_1 a pour image lui-même par F.

2. a. $k' = \frac{-1}{2e^{-i\frac{5\pi}{3}}} = \frac{1}{2} e^{i\frac{5\pi}{3}}$ (forme algébrique) ou $k' = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

b. $M \in C_2 \Leftrightarrow OM = 2 \Leftrightarrow |z| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{2}$

or $|z'| = \left| \frac{1}{z} \right|$ donc $M \in C_2 \Leftrightarrow |z'| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow OM' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M'$ appartient au cercle de centre O de rayon $\frac{1}{2}$

C_2 a pour image par F le cercle de centre O de rayon $\frac{1}{2}$.

3. On désigne par R un point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$. R appartient au cercle C_3 de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z' + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{z}$. En déduire que: $|z' + 1| = |z'|$.

$$z' + 1 = \frac{-1}{z} + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{z}$$

$$z = 1 + e^{i\theta} \text{ donc } \bar{z} = 1 + e^{-i\theta} \text{ donc } |\bar{z} - 1| = |e^{-i\theta}| = 1$$

$$\text{donc } |z' + 1| = \frac{1}{|z|} \text{ or } |z'| = \frac{1}{|z|} \text{ donc } |z' + 1| = |z'|.$$

b. Soit R le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$, et R' son image par F, R' ayant pour affixe z' alors $|z' + 1| = |z'|$ d'après la question précédente donc $PR' = OR'$ donc R' appartient à la médiatrice de [OP] soit sur la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.