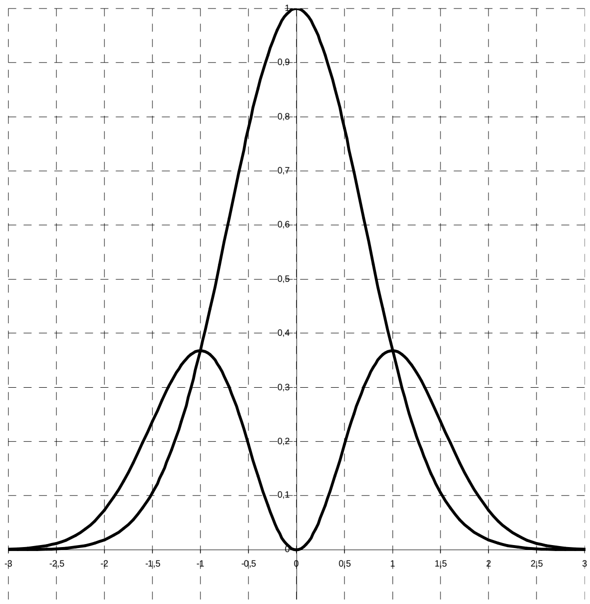
ENONCE

Amérique du Sud nov. 2005

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = x^2 e^{-x^2}$.

On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, dont les tracés se trouvent ci-dessous.



1. Identifier Cf et Cg sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g .
3. Étudier le sens de variation de f et de g . Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de C_f et C_g.

Partie B

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\, dt$.

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ *par : pour tout réel x,* $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

4. Démontrer, que, pour tout réel x : $G(x) = \frac{1}{2}[F(x) - x e^{-x^2}]$;

On admet que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A *limité par la courbe* C_f *et les demi-droites* $(O ; \vec{i})$ *et* $(O ; \vec{j})$

5\. *a*. Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $N = \int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2}\, dt$

c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathscr{P}$ en unités d'aire du domaine D limité par la demi-droite $(O ; \vec{i})$ et la courbe C_g , justifier graphiquement que : $\int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2}\, dt \geq \frac{l}{2}$.

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)

CORRECTION

Partie A

1. $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$ d'où la distinction des deux courbes.

2. Pour tout x réel, $-x \in \mathbb{R}$ et $(-x)^2 = x^2$ donc $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = g(x)$

f et g sont donc paires, il suffit de les étudier sur $[0 ; +\infty[$. Leurs courbes seront symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

3. $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$ donc si $x > 0$, $f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$g'(x) = (2x - 2x^3)\, e^{-x^2} = 2x(1-x)(1+x)\, e^{-x^2}$

La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$ donc si $x > 1$, $g'(x) < 0$ et si $0 < x < 1$ alors $g'(x) > 0$ de plus $g'(0) = g'(1) = 0$ donc g est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

4. $f(x) - g(x) = (1 - x^2)\,e^{-x^2} = (1 - x)(1 + x)\,e^{-x^2}$
donc
si $0 \leq x < 1$, $1 - x > 0$ donc $f(x) - g(x) > 0$,
C_f est au dessus de C_g.
si $x = 1$, $f(x) - g(x) = 0$, le point $A(1\,;\,e^{-1})$ est point d'intersection des deux courbes
si $1 < x$, $1 - x < 0$ donc $f(x) - g(x) < 0$,
C_f est en dessous de C_g.
Les courbes étant symétriques par rapport à (O y),
si $-1 < x \leq 0$, C_f est au dessus de C_g.
si $x < -1$, C_f est en dessous de C_g.
le point $A'(-1\,;\,e^{-1})$ est point d'intersection des deux courbes

Partie B

1. La fonction g est définie, continue sur $\mathbb{R}$ donc G est la primitive de g nulle en 0

2. La fonction g est définie, continue, positive sur $\mathbb{R}$
si $x > 0$, G est une mesure de l'aire limitée par l'axe des abscisses, la courbe de g et les droites d'équations $t = 0$, $t = x$

3. G est la primitive de g nulle en 0 donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = g(x)$
La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ donc $G'(x) \geq 0$
$G(0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

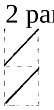
4. La fonction f est définie, continue sur $\mathbb{R}$ donc F est la primitive de f nulle en 0, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = f(x)$
La dérivée de la fonction $\varphi : x \to \frac{1}{2}[F(x) - x\,e^{-x^2}]$ est la fonction φ' telle que :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left\{ f(x) - [1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x\,e^{-x^2})] \right\}$$

soit $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left\{ x\,e^{-x^2} - e^{-x^2} + 2x^2\,e^{-x^2} \right\} = x^2\,e^{-x^2}$ donc $G'(x) = \varphi'(x)$
donc $G(x) = \varphi(x) + k$ or $G(0) = \varphi(0) + k = 0$ or $\varphi(0) = 0$ donc $k = 0$ donc $G(x) = \varphi(x)$

5. *a.* $G(x) = \frac{1}{2}[F(x) - x\,e^{-x^2}]$
Soit $t = x^2$, si $x > 0$, $x = \sqrt{t}$ donc $x\,e^{-x^2} = \sqrt{t}\,e^{-t}$
or $\lim\limits_{x \to +\infty} t = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \sqrt{t}\,e^{-t} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x^2} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \frac{1}{2}\ell$

b. $N = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt - \int_0^1 t^2\,e^{-t^2}\,dt .= F(1) - G(1)$
Sur [0 ; 1] la courbe de f est au dessus de celle de g donc N est l'aire comprise entre la courbe de f, celle de g, les droites d'équation $t = 0$, $t = 1$.

c.
ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A limité par la courbe C_f et les demi-droites $\left(O\,;\,\vec{i}\right)$ et $\left(O\,;\,\vec{j}\right)$
donc en décomposant cette aire en 2 parties :
ℓ est égale à l'aire N  + l'aire A 
$\ell = N + A$
L'aire A correspond à un domaine entièrement situé à l'intérieur de la courbe de g donc $A \leq \frac{l}{2}$ donc $N + A \leq N + \frac{l}{2}$
soit $\ell \leq N + \frac{l}{2}$ donc $N \geq \frac{l}{2}$