Centres étrangers juin 2014

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

$x = 0$ pour le blanc ;

$x = 1$ pour le noir ;

$x = 0{,}01$; $x = 0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0{,}99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle [0 ; 1] ;
- f est croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2 = 0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2} \approx 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x]$.

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle [0 ; 1] la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 1] : $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-1)x}{1 + (\mathrm{e}-1)x}$.

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 1]. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, un maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet sur l'intervalle [0 ; 1] deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$ et que : $0{,}85 < \beta < 0{,}86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance *n*'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (écart) c (compteur) k
Initialisation	c prend la valeur 0

Traitement	Pour k allant de 0 à 100, faire
	    x prend la valeur $\dfrac{k}{100}$
	    y prend la valeur $f(x)$
	    E prend la valeur $\lvert y - x \rvert$
	        Si E > 0,05, faire
	            c prend la valeur $c + 1$
	        Fin si
	Fin pour

Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie A ?

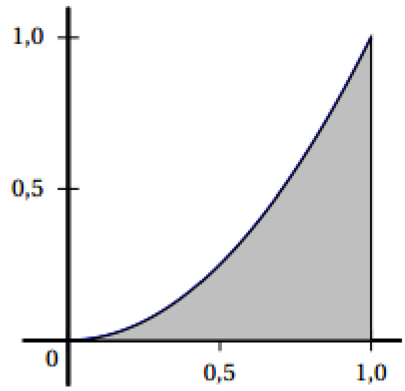
Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est à dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $f(x) \leq x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire A_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_3 = x\,e^{(x^2-1)} \text{ et } f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$



1\. *a.* Calculer A_{f_3}.

b. Calculer A_{f_4}.

2\. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

CORRECTION

Partie A

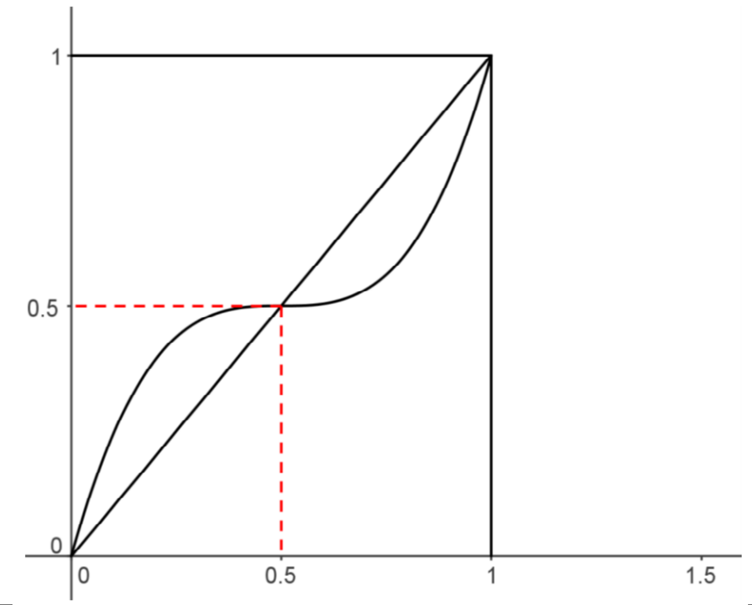
1\. *a.* Vérification :

- $f_1(0) = 0$;
- f_1 est un polynôme donc continue sur l'intervalle [0 ; 1] ;
- $f'_1(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1)$

$f'_1(x) = 3(2x-1)^2$ donc pour tout x de [0 ; 1], $f'_1(x) \geq 0$ donc f_1 est croissante sur l'intervalle [0 ; 1]. La fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Graphiquement $f_1(x) \leq x \Leftrightarrow 0{,}5 \leq x \leq 1$

La fonction f_1 éclaircira les nuances inférieures à 0,5 et assombrira celles supérieures à 0,5.



2\. *a.* $g'(x) = \dfrac{(e-1)}{1+(e-1)x} - 1$ donc, $g'(x) = \dfrac{(e-1)-1-(e-1)x}{1+(e-1)x}$

donc pour tout x de l'intervalle [0 ; 1] : $g'(x) = \dfrac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}$

b. $e > 1$ donc $e - 1 > 0$, $x \in [0 ; 1]$ donc $1 + (e-1)x > 0$ $g'(x)$ *a* le même signe que $(e-2) - (e-1)x$

$(e-2) - (e-1)x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{e-2}{e-1}$ et $-(e-1) < 0$ donc :

x	0		$\frac{e-2}{e-1}$		1
$g'(x)$		+	0	–	
g	0	↗	$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$	↘	0

La fonction g est croissante sur $\left[0 ; \dfrac{e-2}{e-1}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{e-2}{e-1} ; 1\right]$ donc la fonction g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$.

Ce maximum est égal à $g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right)$ soit $\ln(1 + e - 2) - \dfrac{e-2}{e-1} = \ln(e-1) - \dfrac{e-2}{e-1}$ dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. La fonction g est définie continue, strictement croissante sur $\left[0 ; \dfrac{e-2}{e-1}\right]$, $g(0) = 0$ et $g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right) \approx 0{,}12$

donc $g(0) \leq 0{,}05 \leq g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right)$ donc l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{e-2}{e-1}\right]$ une solution α.

La fonction g est définie continue, strictement décroissante sur $\left[\dfrac{e-2}{e-1}\,;1\right]$, $g(1)=0$ et $g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right)\approx 0{,}12$ donc $g(1)\leq 0{,}05\leq g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right)$ donc l'équation $g(x)=0{,}05$ admet sur l'intervalle $\left[\dfrac{e-2}{e-1}\,;1\right]$ une solution β, $\beta\neq\dfrac{e-2}{e-1}$.

L'équation $g(x)=0{,}05$ admet sur l'intervalle [0 ; 1] deux solutions α et β, avec $\alpha<\beta$.

Partie B

1. L'algorithme calcule le nombre de modifications à effectuer avec la fonction de retouche (avec un pas de 0,01) pour lesquelles la modification de nuances est perceptible visuellement.

2. On cherche donc les valeurs de x telles que $f_2(x)-x\geq 0{,}05$ c'est-à-dire telles que $g(x)\geq 0{,}05$.

x	0	α	$\dfrac{e-2}{e-1}$	β	1
$g'(x)$		+	0	–	
g	0	↗ 0,05	M ≈ 0,12	↘ 0,05	0

$g(x)\geq 0{,}05 \Leftrightarrow \alpha\leq x\leq\beta$ Ce sont donc toutes les nuances comprises entre les 2 solutions α et β de la partie précédente, les nuances sont des nombres de la forme 100 k , donc les nuances sont comprises entre 0,09 et 0,85. Il y en a par conséquent 85 – 9 + 1 = 77 nuances. L'affichage est 77.

Partie C

a. $A_{f_3}=\displaystyle\int_0^1 x\,e^{x^2-1}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e$ soit $A_{f_3}\approx 0{,}32$.

b. $A_{f_4}=\displaystyle\int_0^1\left(4x-15+\frac{60}{x+4}\right)dx=\left[\,2x^2-15x+60\ln(x+4)\,\right]_0^1=-13+60\ln 5-60\ln 4$ soit $A_{f_4}\approx 0{,}39$

2. On a $A_{f_3}\approx$ 0,316 et $A_{f_4}\approx 0{,}389$.

Entre les deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire or $A_{f_3}<A_{f_4}$ donc f_3 a pour effet d'éclaircir le plus l'image.