Polynésie septembre 2009

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

Soient les points P et Q tels que OP = 2 OA et OQ = 4 OC . On appelle R le barycentre des points pondérés (B, – 1) et (F , 2).

L'espace est muni du repère orthonormal (O ; OA , OC , OD).

1. *a.* Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

c. Quelle est la nature du triangle PQR ?

2. *a.* Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.

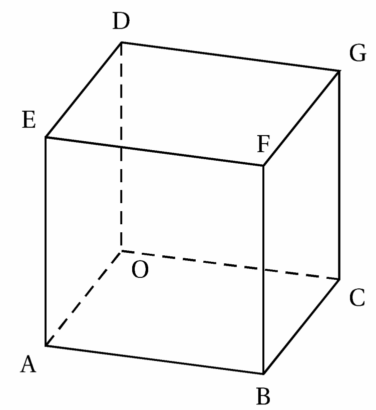
b. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).

3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).

a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).

b. Déterminer les coordonnées du point H.

c. Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



CORRECTION

1. *a.* R est le barycentre des points pondérés (B, – 1) et (F , 2) donc $(-1+2)$ OR = – OB + 2 OF

donc $x_R = -x_B + 2x_F$ de même $y_R = -y_B + 2y_F$ et $z_R = -z_B + 2z_F$ donc le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

b. PR a pour coordonnées (1 – 2 ; 1 ; 2) soit (– 1 ; 1 ; 2)

PQ a pour coordonnées (– 2 ; 4 ; 0) soit PQ et PR ne sont pas colinéaires donc les points *P*, Q et R ne sont pas alignés.

c. $PR^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$; $PQ^2 = (-2)^2 + 4^2 + 0^2 = 20$ et $QR^2 = 1^2 + (1-4)^2 + 2^2 = 14$ donc $PQ^2 = PR^2 + QR^2$

Le triangle PQR est rectangle en R.

2. *a.* Soit *n* le vecteur de coordonnées (4 ; 2 ; 8) alors $n \cdot PR = 4 \times (-1) + 2 \times 1 + 1 \times 2 = 0$ et $n \cdot PQ = 4 \times (-2) + 2 \times 4 + 1 \times 0 = 0$

PR et PQ sont non colinéaires et tous deux orthogonaux à *n* donc *n* est un vecteur normal au plan (PQR).

(PQR) *a* une équation de la forme $4x + 2y + z + d = 0$, *P* appartient à ce plan donc $4 \times 2 + 2 \times 0 + 0 + d = 0$ donc $d = -8$.

Une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.

b. D a pour coordonnées (0 ; 0 ; 1) donc $4 \times 0 + 2 \times 0 + 1 - 8 \neq 0$ donc le point D n'appartient pas au plan (PQR).

3. *a.* DH est colinéaire à *n* donc pour tout point M de (DH), il existe un réel *k* tel que DM = *k n* donc un système d'équations paramétriques de la droite (DH) est $\begin{cases} x = 4k \\ y = 2k \\ z = k + 1 \end{cases}$

b. H a pour coordonnées (4 *k* ; 2 *k* ; *k* + 1)

H appartient au plan (PQR) donc $4 \times (4k) + 2 \times (2k) + (k+1) - 8 = 0$ donc $21k - 7 = 0$ soit $k = \frac{1}{3}$.

Les coordonnées du point H sont $\left(\frac{4}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

c. PH a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3} - 2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$ soit $\left(-\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$. PR a pour coordonnées (– 1 ; 1 ; 2) donc PH = $\frac{2}{3}$ PR

Le point H appartient à la droite (PR).