ENONCE

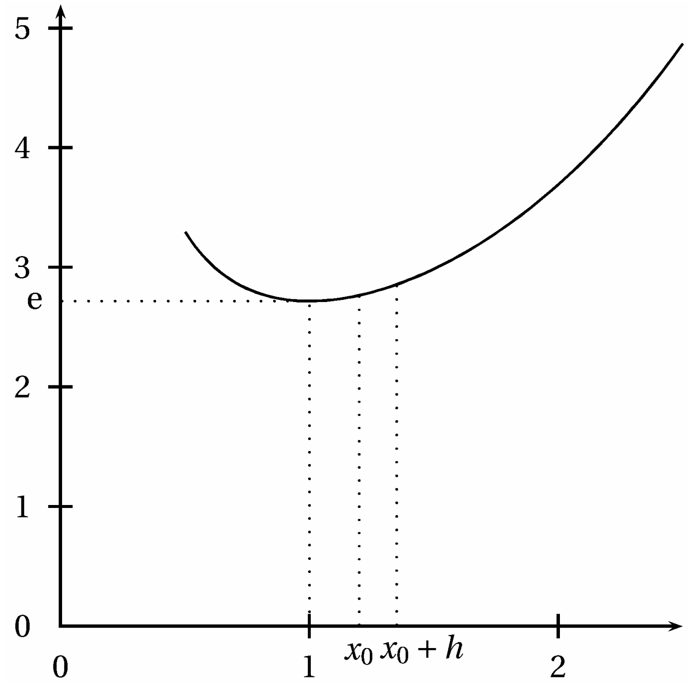
Pondichéry 2005

On considère la fonction f, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$.

1. *a.* Justifier la continuité de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
b. Montrer que f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Restitution organisée de connaissances
On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.
Pour tout réel x_0 de $[1\ ;\ +\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.
On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ est une primitive de f.
a. Que vaut $A(1)$?
b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et h un réel strictement positif.
Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h > 1$?
d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction A ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction A.
e. Conclure.



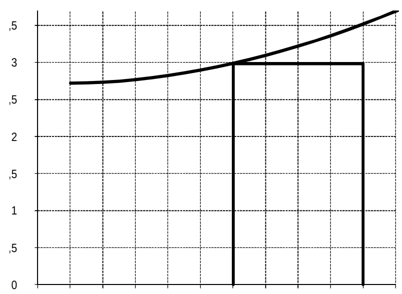
CORRECTION

1. *a.* Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto t$ sont continues sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc leur quotient f est continu sur son domaine de définition $[1\ ;\ +\infty[$.

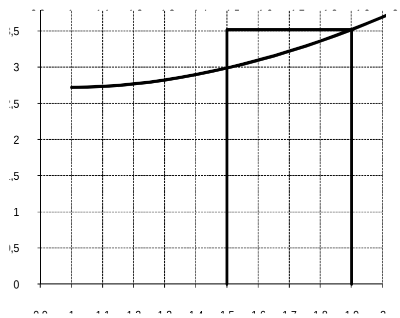
b. On montre de même que f est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$
$f'(t) = \dfrac{t-1}{t} e^t$ donc sur $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(t) \geq 0$ donc f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances
a. $A(1)$ est l'aire d'un segment donc $A(1) = 0$

b. f est continue et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$
$A(x_0 + h) - A(x_0)$ est l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0 + h$ et $x = x_0$
Ce domaine contient le rectangle limité l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0 + h$ et $x = x_0$ et $y = f(x_0)$ donc rectangle de dimension : largeur h, longueur $f(x_0)$
donc $h\, f(x_0) \leq A(x_0 + h) - A(x_0)$



Ce domaine est également contenu dans le rectangle limité l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0 + h$ et $x = x_0$ et $y = f(x_0 + h)$ donc le rectangle de dimension : largeur h, longueur $f(x_0 + h)$
donc $A(x_0 + h) - A(x_0) \leq h\, f(x_0 + h)$
soit $h\, f(x_0) \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq h\, f(x_0 + h)$
$h > 0$ donc $f(x_0) \leq \dfrac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$.



c. Si $h < 0$, $x_0 + h < x_0$ donc $A(x_0) - A(x_0 + h)$ est l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0 + h$ et $x = x_0$
Ce domaine contient le rectangle limité l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0 + h$ et $x = x_0$ et $y = f(x_0 + h)$
donc le rectangle de dimension : largeur $x_0 - (x_0 + h) = -h$, longueur $f(x_0 + h)$
donc $-h\, f(x_0 + h) \leq A(x_0) - A(x_0 + h)$
Ce domaine est contenu dans le rectangle limité l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0 + h$ et $x = x_0$ et $y = f(x_0)$

donc le rectangle de dimension : largeur $x_0 - (x_0 + h) = -h$, longueur $f(x_0)$
donc $A(x_0) - A(x_0 + h) \leq -h\, f(x_0)$
soit $-h\, f(x_0 + h) \leq A(x_0) - A(x_0 + h) \leq -h\, f(x_0)$
$-h > 0$ donc $f(x_0 + h) \leq \dfrac{A(x_0) - A(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$ donc $f(x_0 + h) \leq \dfrac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0)$.

d. $\dfrac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}$ est compris entre $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$
La fonction f étant continue sur [1 ; + ∞[, $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$.
A est dérivable en x_0 et $A'(x_0) = f(x_0)$

e. Pour tout x_0 de [1 ; + ∞ [, A est dérivable en x_0 et $A'(x_0) = f(x_0)$ donc la fonction a définie sur [1 ; + ∞[est une primitive de f .