Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) : $2x^2 + y^2 = 139$ avec (x , y) un couple d'entiers naturels.

1. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne du carré a^2 d'un entier a par 3.

2. On suppose que (x , y) est un couple d'entiers naturels vérifiant $2x^2 + y^2 = 139$.

i. Montrer que x est divisible par 3.

ii. Montrer que $x \leq 8$.

3. Résoudre l'équation (E).

CORRECTION

1. Divisons a par 3, il existe deux entiers naturels q et r tels que $a = 3q + r$ avec $0 \leq r \leq 2$
alors $a^2 = (3q + r)^2 = 9q^2 + 6qr + r^2$
$a^2 = 3(3q^2 + 2qr) + r^2$
si $r = 0$ alors $a^2 = 9q^2$ donc le reste de la division de a^2 par 3 est 0
si $r = 1$ alors $a^2 = 3(3q^2 + 2q) + 1$ donc le reste de la division de a^2 par 3 est 1
si $r = 0$ alors $a^2 = 3(3q^2 + 4q) + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$ donc le reste de la division de a^2 par 3 est 1

donc si a est divisible par 3, le reste de la division de a^2 par 3 est 0
si a n'est pas divisible par 3, le reste de la division de a^2 par 3 est 1.

2. i. si x n'est pas divisible par 3, le reste de la division de x^2 par 3 est 1 donc $x^2 = 3q + 1$
donc en remplaçant $2(3q + 1) ^2 + y^2 = 139$ soit $y^2 = -6q + 137$ or $137 = 3 \times 45 + 2$ donc $y^2 = 3(-2q + 45) + 2$
or si y est un entier quelconque, le reste de la division de y^2 par 3 est 0 ou 1 donc ne peut pas être 2 donc l'hypothèse « x n'est pas divisible par 3 » est fausse.

si x est divisible par 3, le reste de la division de x^2 par 3 est 0 donc $x^2 = 3q$ donc en remplaçant $2 \times 3q + y^2 = 139$
$y^2 = -6q + 139$ or $139 = 3 \times 46 + 1$
$y^2 = 3(-2q + 46) + 1$ donc le reste de la division de y^2 par 3 est 1 ce qui est possible

Si l'équation $2x^2 + y^2 = 139$ admet une solution, alors x est divisible par 3 et y ne l'est pas

ii. $y^2 \geq 0$ donc $2x^2 + y^2 \geq 2x^2$ donc $2x^2 \leq 139$ donc $x^2 \leq 69$ soit $-\sqrt{69} \leq x \leq \sqrt{69}$ or $8 \leq \sqrt{69} < 9$, x est un nombre entier donc $0 \leq x \leq 8$.

3. Si l'équation $2x^2 + y^2 = 139$ admet une solution, alors x est divisible par 3, et $x \leq 8$ donc soit $x = 0$ soit $x = 3$ soit $x = 6$
si $x = 0$, l'équation devient $y^2 = 139$ or 139 n'est pas un carré parfait donc $x \neq 0$
si $x = 3$, l'équation devient $2 \times 3^2 + y^2 = 139$ soit $y^2 = 121$
$y \geq 0$ donc $y = 11$
si $x = 6$, l'équation devient $2 \times 6^2 + y^2 = 139$ soit $y^2 = 139 - 72 = 67$ or 37 n'est pas un carré parfait donc $x \neq 6$
$2x^2 + y^2 = 139$ admet pour solution $x = 3$ et $y = 11$