Amérique du Sud novembre 2007

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).
   Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe $z' = -\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 + \mathrm{i}$.
2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport – 2. Donner l'écriture complexe de H.
3. On note f la composée H o S.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M" l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM''}} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM''}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

CORRECTION

1. L'écriture complexe d'une symétrie axiale (antidéplacement) est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$.

A et B sont invariants par cette symétrie donc : $1 = a \times 1 + b$ et $\mathrm{i} = a \times (-\,\mathrm{i}) + b$.

par différence membre à membre : $1 - \mathrm{i} = a\,(1 + \mathrm{i})$ donc $a = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = -\,\mathrm{i}$

$1 = a + b$ donc $b = 1 - a = 1 + \mathrm{i}$ donc l'écriture complexe est donc : $z' = -\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2\. *a*. H est un similitude directe de centre A de rapport 2 d'angle π

La réflexion S est une similitude de rapport 1 or la composée de deux similitudes est une similitude de rapport 2 (produit des rapports des deux similitudes).

b. L'écriture complexe de S, est : $z' = -\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 + \mathrm{i}$.

L'écriture complexe de S, est : $\overrightarrow{\mathrm{AM''}} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ donc $z'' - 1 = -2\,(z' - 1)$ soit $z'' = -2\,z + 3$

f : $\mathrm{M}(z) \xrightarrow{\ S\ } \mathrm{M}'(z') \xrightarrow{\ H\ } \mathrm{M}''(z'') = f(\mathrm{M})$ avec $z' = -\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 + \mathrm{i}$ et $z'' = -2\,z' + 3$ donc $z'' = -2\,(-\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 + \mathrm{i}) + 3$

L'écriture complexe de f est donc $z'' = 2\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 - 2\,\mathrm{i}$

4\. *a*. $z'' = 2\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 - 2\,\mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AM''}}$ a pour affixe $z'' - 1 = 2\,\mathrm{i}\,\bar{z} - 2\,\mathrm{i} = 2\,\mathrm{i}\,(\bar{z} - 1)$

Si $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels alors $z'' - 1 = 2\,\mathrm{i}\,[(x-1) - \mathrm{i}\,y] = 2\,y + 2\,\mathrm{i}\,(x-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AM''}}$ a pour coordonnées $(2\,y\ ;\ 2\,x - 2)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AM''}} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,y = -2\,(x-1) \\ 2\,(x-1) = -2\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ x - 1 = -y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1$$

Le point A (1 ; 0) appartient à la droite d'équation $x + y = 1$ ainsi que le point B (0 ; 1) donc cette droite est la droite (AB)

$\overrightarrow{\mathrm{AM''}} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow \mathrm{M} \in (\mathrm{AB})$

b. De même $$\overrightarrow{\mathrm{AM''}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,y = 2\,(x-1) \\ 2\,(x-1) = 2\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow y = x - 1$$

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ de coordonnées (– 1 ; 1).

Soit Δ la droite d'équation $y = x + 1$, A $\in \Delta$ ainsi que le point C de coordonnées (0 ; – 1) un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ de coordonnées (– 1 ; – 1)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = 0$ donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales. Δ est la perpendiculaire en A à (AB).

l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM''}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).