Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, soit f une application telle que à tout point M d'affixe z différente de -1 elle associe le point M d'affixe z' avec $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.

a. Déterminez les points invariants de f c'est à dire tels que $f(\text{M}) = \text{M}$

b. Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que $f(\text{M})$ appartienne à l'axe des ordonnées

c. Montrer que pour tout z différent de (-1) on a $(z'-1)(z+1) = -2$

d. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$ puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$ pour tout z différent de (-1).
Traduire ces 2 relations en termes de distances et d'angles

e. Montrez que si M appartient au cercle C de centre B (d'affixe $b = -1$) et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

CORRECTION

a. Déterminez les points invariants de f c'est à dire tels que $f(\text{M}) = \text{M}$

$f(\text{M}) = \text{M} \Leftrightarrow z = \dfrac{z-1}{z+1}$ et $z \neq -1 \Leftrightarrow z(z+1) = z-1$ et $z \neq -1 \Leftrightarrow z^2 + z = z - 1$ et $z \neq -1 \Leftrightarrow z^2 = -1$ et $z \neq -1$

$f(\text{M}) = \text{M} \Leftrightarrow z^2 = i^2$ et $z \neq -1 \Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$

f admet deux points invariants : P d'affixe i et Q d'affixe – i.

b. Soit $z = x = i\,y$ alors $z' = \dfrac{x-1+i\,y}{x+1+i\,y} = \dfrac{(x-1+i\,y)(x+1-i\,y)}{(x+1+i\,y)(x+1-i\,y)}$

$z' = \dfrac{(x-1)(x+1)+i\,y(x+1)-i\,y(x-1)+y^2}{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow z' = \dfrac{x^2+y^2-1+2\,i\,y}{(x+1)^2+y^2}$

z' est un imaginaire pur si et seulement si, la partie réelle de z' est nulle soit $\dfrac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = 0$ et $(x;y) \neq (-1;0)$

z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ et $(x;y) \neq (-1;0) \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O de rayon 1 privé du point B de coordonnées $(-1;0)$.

c. Montrer que pour tout z différent de (-1) on a $(z'-1)(z+1) = -2$

$z' = \dfrac{z-1}{z+1}$ donc $z' - 1 = \dfrac{z-1}{z+1} - 1 = \dfrac{-2}{z+1}$ donc pour tout z différent de (-1) on a $(z'-1)(z+1) = -2$

.

d. pour tout z différent de (-1) on a $(z'-1)(z+1) = -2$ donc $|z'-1| \times |z+1| = |-2| = 2$
Pour tout z différent de (-1), $\arg[(z'-1)(z+1)] = \arg(-2)$
Pour tout z différent de (-1), $\arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi$ à 2π près
$|z'-1| \times |z+1| = 2$ donc, pour tout point M différent de B, si A est le point d'affixe 1, AM' × BM = 2
Pour tout z différent de (-1), $\arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi$ à 2π près donc pour tout point M différent de B, $(\vec{u};\overrightarrow{\text{AM}'}) + (\vec{u};\overrightarrow{\text{BM}}) = \pi$ à 2π près

e. si M appartient au cercle C de centre B (d'affixe $b = -1$) et de rayon 2 alors BM = 2 donc $|z+1| = 2$ or AM' × BM = 2 donc AM' = 1 donc M' appartient au cercle C' de centre A et de rayon 1.