

I. Résoudre dans \mathbb{N} , le système $S : \begin{cases} a b = 12\,600 \\ \text{ppcm}(a; b) = 1260 \end{cases}$

II. Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Pour : $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.
2. a. Montrer par récurrence sur n , que $5^{4n} - 1$ est divisible par 13
- b. En déduire que : $5^{4n+1} - 5$, $5^{4n+2} - 12$; et $5^{4n+3} - 8$ est divisible par 13.
- c. Déterminer alors le reste de la division par 13 du nombre 5^{2011}
3. Le nombre p étant un entier naturel on considère le nombre A , défini par $A(p) = 5^{2p} + 5^{4p}$.
 - a. Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de A , par 13 ?
 - b. Démontrer que, si $p = 2n + 1$, A est divisible par 13.
4. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$, définie par : $u_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}$
 - a. Montrer que $u_n = \frac{5^n - 1}{4}$.
 - b. Montrer que si u_n est divisible par 13 alors $5^n - 1$ est divisible par 13.
 - c. Réciproquement, montrer que si $5^n - 1$ est divisible par 13, alors u_n est divisible par 13

Indication : $13 u_n - 3 \times (4 u_n) = u_n$.

d. En déduire les valeurs de n telles que u_n , soit divisible par 13.

CORRECTION

I. Soit $d = \text{pgcd}(a; b)$ alors il existe a' et b' deux entiers tels que $a = d a'$, $b = d b'$ et $\text{pgcd}(a'; b') = 1$

$a b = \text{pgcd}(a; b) \times \text{ppcm}(a; b)$ donc $12\,600 = d \times 1260$ soit $d = 10$

$a = 10 a'$, $b = 10 b'$ donc $a' b' = 126$

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$ donc on a les possibilités suivantes (en colonne) :

a'	1	2	3	6	7	9	14	18	21	42	63	126
b'	126	63	42	21	18	14	9	7	6	3	2	1
$a = 10 a'$	10	20	30	60	70	90	140	180	210	420	630	1260
$b = 10 b'$	1260	630	420	210	180	140	90	70	60	30	20	10

II — Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Pour : $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.

$$5 = 0 \times 13 + 5$$

$$5^4 = (5^2)^2 = 13(13 + 2 \times 12) + 1$$

$$5^2 = 25 = 1 \times 13 + 12$$

$$5^5 = 5^4 \times 5 \text{ donc } 5^5 = 13 \times 240 + 5$$

$$5^3 = 10 \times 13 - 5 = 9 \times 13 + 8$$

$$5^6 = 5^4 \times 5^2 \text{ donc } 5^6 = 13 \times 1201 + 12$$

Il aurait été beaucoup plus simple de raisonner avec des congruences.

n	1	2	3	4	5	6
reste de la division de 5^n par 13	5	12	8	1	5	12

2. a. **Initialisation** : Si $n = 0$, $5^{4n} - 1 = 0$ donc $5^{4n} - 1$ est divisible par 13

Hérédité : montrons pour tout entier n que si $5^{4n} - 1$ est divisible par 13 alors $5^{4(n+1)} - 1$ est divisible par 13

$$5^{4(n+1)} - 1 = 5^{4n} \times 5^4 - 1 = (5^{4n} - 1) \times 5^4 + 5^4 - 1$$

$5^4 - 1$ et $5^{4n} - 1$ sont divisibles par 13 donc $5^{4(n+1)} - 1$ est divisible par 13.

La propriété est héréditaire

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n , $5^{4n} - 1$ est divisible par 13

b. 13 divise $5^{4n} - 1$ donc 13 divise $5 \times (5^{4n} - 1) = 5^{4n+1} - 5$,

$$5^{4n+2} - 12 = 5^2 \times (5^{4n} - 1) + 5^2 - 12, \text{ or le reste de la division de } 5^2 \text{ par 13 est 12 donc 13 divise } 5^2 - 12$$

13 divise $5^2 \times (5^{4n} - 1)$ et 13 divise $5^2 - 12$ donc 13 divise $5^2 \times (5^{4n} - 1) + 5^2 - 12$, soit 13 divise $5^{4n+2} - 12$

$$5^{4n+3} - 8 = 5^{4n+3} - 5^3 + 5^3 - 8 = 5^3 \times (5^{4n} - 1) + 5^3 - 8, \text{ or le reste de la division de } 5^3 \text{ par 13 est 8 donc 13 divise } 5^3 - 8$$

13 divise $5^3 \times (5^{4n} - 1)$ et 13 divise $5^3 - 8$ donc 13 divise $5^3 \times (5^{4n} - 1) + 5^3 - 8$, soit 13 divise $5^{4n+3} - 8$

c. $2011 = 4 \times 502 + 1$ donc 2011 est de la forme $4n + 1$ donc 13 divise $5^{2011} - 5$ donc le reste de la division par 13 du nombre 5^{2011} est 5.

3. Le nombre p étant un entier naturel on considère le nombre A , défini par $A(p) = 5^{2p} + 5^{4p}$.

a. Si $p = 2n$ alors $A(p) = 5^{4n} + 5^{8n} = 5^{4n} - 1 + 5^{4 \times 2n} - 1 + 2$,

13 divise $5^{4n} - 1$ et $5^{4 \times 2n} - 1$ donc $A(p)$ est de la forme $13q + 2$ ($q \in \mathbb{N}$) donc le reste de la division de $A(p)$ par 13 est 2.

b. $A(p) = 5^{4n+2} + 5^{4 \times (2n+1)} = 5^{4n+2} - 12 + 5^{4 \times (2n+1)} - 1 + 13$

13 divise $5^{4n+2} - 12$ et $5^{4 \times (2n+1)} - 1$ donc $A(p)$ est de la forme $13q$ ($q \in \mathbb{N}$) donc si $p = 2n + 1$, $A(p)$ est divisible par 13

4. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$, définie par : $u_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}$

a. Si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{a^n - 1}{q - 1}$ donc en choisissant $q = 5$: $u_n = \frac{5^n - 1}{4}$.

b. Si u_n est divisible par 13 alors il existe un entier k tel que $\frac{5^n - 1}{4} = 13k$ soit $5^n - 1 = 13 \times 4k$ donc $5^n - 1$ est divisible par 13.

c. si $5^n - 1$ est divisible par 13, alors, il existe un entier k tel que $5^n - 1 = 13k$

$\frac{5^n - 1}{4}$ est un entier et 13 et 4 sont premiers entre eux donc 4 divise k , il existe un entier k' tel que $k = 4k'$ alors $u_n = 13k'$ donc u_n est divisible par 13

d. D'après les questions précédentes, u_n est divisible par 13 si et seulement si $5^n - 1$ est divisible par 13
Soit n un entier naturel, en divisant n par 4, on a 4 cas possibles : $n = 4p$; $n = 4p + 1$; $n = 4p + 2$; $n = 4p + 3$

D'après les questions précédentes :

le reste de la division par 13 de 5^{4p} est 1 donc 13 divise $5^{4p} - 1$

le reste de la division par 13 de 5^{4p+1} est 5 donc 13 ne divise pas $5^{4p+1} - 1$

le reste de la division par 13 de 5^{4p+2} est 12 donc 13 ne divise pas $5^{4p+2} - 1$

le reste de la division par 13 de 5^{4p+3} est 8 donc 13 ne divise pas $5^{4p+3} - 1$.

$5^n - 1$ est divisible par 13 $\Leftrightarrow n = 4p \Leftrightarrow u_n$ est divisible par 13