Exercice 1

On considère les deux ensembles suivants : E = $\{7k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$ et F = $\{7q - 4, q \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que E = F.

Pour montrer que E = F, on va procéder par inclusion réciproque c'est-à-dire :

1. $E \subset F$
2. $F \subset E$.

Commençons par établir que $E \subset F$:
Soit n un élément de E, alors il existe k entier relatif tel que $n = 7k+3$

But : Prouver que $n \in F$ (on doit prouver qu'il existe q entier relatif tel que $n = 7q - 4$)

Comme $n = 7k + 3$
Alors $n = 7k + 3 = 7k + 7 - 7 + 3 = (7k + 7) + (-7 + 3) = 7(k + 1) - 4 = 7q - 4$
avec $q = k+1$ entier relatif.

Conclusion 1 : Si $n \in E$ alors $n \in F$ donc $E \subset F$.

Réciproquement soit $m \in F$, il existe q' entier relatif tel que $m = 7q' - 4$

But : Prouver que $m \in E$ (on doit prouver qu'il existe k entier relatif tel que $m = 7k + 3$)

Comme $m = 7q' - 4$
Alors $m = 7q' - 7 + 7 - 4 = 7(q' - 1) + 3 = 7k + 3$ avec $k = q' - 1$ entier relatif.

Conclusion 2 : Si $m \in F$ alors $m \in E$ donc $F \subset E$.

Bilan : $E \subset F$ et $F \subset E$ donc E = F

Exercice 2

n est un entier naturel.
Démontrer que quel que soit n, $3n^4 + 5n + 1$ est impair et en déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

a. Commençons par établir que $n(n+1)$ est nécessairement pair

En effet

- Si n est pair alors $n(n+1)$ est aussi pair puisque $n = 2k$ (k entier) et donc $n(n+1) = 2k(n+1) = 2u$ avec $u = k(n+1)$ entier
- Si n est impair alors $n = 2q + 1$ avec q entier et donc $n(n+1) = (2q+1)(2q+2) = 2(2q+1)(q+2) = 2v$ avec $v = (2q+1)(q+2)$ entier

Dans tous les cas, (par disjonction des cas), le nombre $n(n+1)$ est pair.

b.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $3n^4+5n+1$ est un nombre impair

- **Initialisation** :
  Pour $n = 0$, $3n^4+5n+1$ vaut 1 et 1 est bien un nombre impair puisque $1 = 2 \times 0 + 1$ (de la forme $2p+1$

avec p entier) , donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse, il existe k_n entier tel que $3n^4+5n+1 = 2k_n +1$

(Le but est de prouver à présent qu'il existe un entier qu'on notera k_{n+1} tel que $3(n+1)^4+5(n+1)+1= 2k_{n+1} +1$)

Comme $(n+1)^4 = ((n+1)^2)^2 = (n^2+2n+1)\times(n^2+2n+1) = n^4+2n^3+n^2+2n^3+4n^2+2n+n^2+2n+1= n^4+4n^3+6n^2+4n+1$

Alors

$$\begin{aligned}
3(n+1)^4+5(n+1)+1 &= 3(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)+5n+1+5\\
&= 3n^4+12n^3+18n^2+12n+3+5n+1+5\\
&= \underbrace{3n^4+5n+1}_{2k_n+1}+12n^3+18n^2+12n+8\\
&= 2k_n+1 \quad + \quad 2(6n^3+9n^2+6n+4)\\
&= 2(k_n+6n^3+9n^2+6n+4)+1\\
&= 2k_{n+1}+1 \qquad \text{avec } k_{n+1} = k_n+6n^3+9n^2+6n+4 \text{ qui est bien un entier.}
\end{aligned}$$

(c'est $\mathcal{P}(n+1)$)

Conclusion : Selon le principe de la démonstration par récurrence, on a prouvé que pour tout entier naturel n, $3n^4+5n+1$ est un nombre impair

Remarque : on peut établir ce résultat sans passer par une démonstration par récurrence, en utilisant un raisonnement par disjonction des cas.

1er cas : Supposons que n soit pair alors il existe un entier p tel que $n = 2p$

Il en résulte alors que :

$3n^4+5n+1 = 3(2p)^4+5(2p)+1= 3(16p^4)+10p+1= 48p^4+10p+1 =2(24p^4+5p)+1= 2q+1$ avec $q = 24p^4+5p$ qui est un entier.

2ème cas : Supposons que n soit impair alors il existe un entier α tel que $n = 2\alpha+1$

Commençons par établir que nécessairement n^2 est impair si n est impair

$n^2 = (2\alpha+1)^2 = 4\alpha^2+4\alpha+1 = 2\alpha(\alpha+1)+1 = 2\beta+1$ avec $\beta = \alpha(\alpha+1)$ entier

Il en résulte alors qu'à son tour $m^2= (n^2)^2$ est impair lorsque $m = n^2$ est impair

On en déduit que n^4 est impair lorsque n est impair.

Finalement si n est impair,

$3n^4+5n+1 = 3(2\beta+1)+5\times(2\alpha+1)+1 = 6\beta+10\alpha+9 = 2(3\beta+5\alpha)+1 = 2\gamma+1$ avec $\gamma= 3\beta+5\alpha$ qui est un entier.

On vient d'effectuer un raisonnement par disjonction des cas…..

Lorsqu'on se donne un entier naturel n, il n'y a que deux cas possibles : soit il est pair, soit il est impair.

Dans les deux cas, on a prouvé que $3n^4+5n+1$ est un nombre impair, donc dans tous les cas de figure, quel que soit l'entier naturel n, $3n^4+5n+1$ est impair.

Remarque :

En combinant les résultats précédents, on peut montrer que $C_n =3n^4+5n+1$ est un nombre impair. Comment ?....

☞ $3n^4+5n+1 =3n(n^3+1)+2n+1 =3n(n+1)(n^2-n+1)+2n+1$

$A_n = 2n+1$ est un nombre impair et $B_n = 3n(n+1)(n^2-n+1)$ est un nombre pair vu que $n(n+1)$ l'est nécessairement. Il en résulte que $C_n =A_n+B_n = 2\alpha_n+2\beta_n+1 = 2\delta_n+1$ avec $\delta_n = \alpha_n+\beta_n$ donc C_n est impair

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier naturel n pour lequel, $3n^4+5n+1$ est divisible par $n(n+1)$ alors il existe β_n entier (en effet β_n est un entier qui dépend de n) vérifiant :

$$3n^4+5n+1= n(n+1)\,\beta_n \text{ et comme } n(n+1) = 2\,h_n$$

(on a établi que $n(n+1)$ est un nombre pair donc il existe h_n entier tel que $n(n+1)=2\,h_n$)

Il s'ensuit que :

$3n^4+5n+1= n(n+1)\,\beta_n = 2\,h_n \times \beta_n = 2\,u_n$ avec $u_n = h_n \times \beta_n$ qui est un entier.

On aurait prouvé que $3n^4+5n+1$ est un nombre pair et cela est en contradiction avec le fait qu'on a prouvé que quel que soit l'entier naturel n, $3n^4+5n+1$ est un nombre impair.

En d'autres termes, ce qu'on a supposé au départ est faux et par voie de conséquence, $3n^4+5n+1$ ne peut être pas divisible par l'entier $n(n+1)$ et ce quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 3

Soit l'équation (E): $xy - 5x - 5y - 7 = 0$ où x et y désignent des entiers relatifs.

a) Montrer que : $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32$

$(x - 5)(y - 5) = 32 \Leftrightarrow xy - 5x - 5y - 25 = 32$

$\Leftrightarrow xy - 5x - 5y - 7 = 0$

(il suffit de développer le premier membre de l'égalité)

b) Résoudre alors l'équation (E).

L'égalité $(x - 5)\,(y - 5) = 32$ permet d'en déduire que $(x - 5)$ et $(y - 5)$ sont des diviseurs de 32.

Et D(32)= {– 32 ;– 16 ; – 8 ; – 4 ; – 2 ; – 1 ; 1 ;2 ;4 ;8 ;16 ;32}

☞ D(a) désigne l'ensemble des diviseurs de l'entier a.

1er cas : $x - 5 = - 32$	2ème cas : $x - 5 = - 16$	3ème cas : $x - 5 = - 8$	4ème cas : $x - 5 = - 4$
Il en résulte que $y - 5 = - 1$ donc $x = - 27$ et $y = 4$	Il en résulte que $y - 5 = - 2$ donc $x = - 11$ et $y = 3$	Il en résulte que $y - 5 = - 4$ donc $x = - 3$ et $y = 1$	Il en résulte que $y - 5 = - 8$ donc $x = 1$ et $y = - 3$
5ème cas : $x - 5 = - 2$	6ème cas : $x - 5 = - 1$	7ème cas : $x - 5 = 1$	8ème cas : $x - 5 = 2$
Il en résulte que $y - 5 = - 16$ donc $x = 3$ et $y = - 11$	Il en résulte que $y - 5 = - 32$ donc $x = 4$ et $y = - 27$	Il en résulte que $y - 5 = 32$ donc $x = 6$ et $y = 37$	Il en résulte que $y - 5 = 16$ donc $x = 7$ et $y = 21$
9ème cas : $x - 5 = 4$	10ème cas : $x - 5 = 8$	11ème cas : $x - 5 = 16$	12ème cas : $x - 5 = 32$
Il en résulte que $y - 5 = 8$ donc $x = 9$ et $y = 13$	Il en résulte que $y - 5 = 4$ donc $x = 13$ et $y = 9$	Il en résulte que $y - 5 = 2$ donc $x = 21$ et $y = 7$	Il en résulte que $y - 5 = 1$ donc $x = 37$ et $y = 6$

Réciproquement, on vérifie que :

Cas			
n°1 :	Si $(x\,;y)= (-27\,;4)$ alors	$(x - 5)(y - 5) = (-32) \times (-1)= 32$	**
n°2 :	Si $(x\,;y)= (-11\,;3)$ alors	$(x - 5)(y - 5) = (-16) \times (-2)= 32$	**
n°3 :	Si $(x\,;y)= (-3\,;1)$ alors	$(x - 5)(y - 5) = (-8) \times (-4)= 32$	**
n°4 :	Si $(x\,;y)= (1\,;-3)$ alors	$(x - 5)(y - 5) = (-4) \times (-8)= 32$	**
n°5 :	Si $(x\,;y)= (3\,;-11)$ alors	$(x - 5)(y - 5) = (-2) \times (-16)= 32$	**

$n°6$:	Si $(x\ ;y)= (\ 4\ ;-27)$ alors	$(x-5)(y-5)=(-1)\times(-32)=32$	**
$n°7$:	Si $(x\ ;y)= (\ 6\ ;37)$ alors	$(x-5)(y-5)=1\times 32=32$	**
$n°8$:	Si $(x\ ;y)= (\ 7\ ;21)$ alors	$(x-5)(y-5)=2\times 16=32$	**
$n°9$:	Si $(x\ ;y)= (\ 9\ ;13)$ alors	$(x-5)(y-5)=4\times 8=32$	**
$n°10$:	Si $(x\ ;y)= (\ 13\ ;9)$ alors	$(x-5)(y-5)=8\times 4=32$	**
$n°11$:	Si $(x\ ;y)= (\ 21\ ;7)$ alors	$(x-5)(y-5)=16\times 2=32$	**
$n°12$:	Si $(x\ ;y)= (\ 37\ ;6)$ alors	$(x-5)(y-5)=32\times 1=32$	**

** On pourra remarquer que si $(x\ ;y)$ est un couple solution de l'équation (E) alors $(y\ ;x)$ est aussi un couple solution de l'équation (E) et réciproquement.
En d'autres termes, on pouvait éviter certains cas à traiter ce qui réduit le nombre de cas à étudier. En pratique, on divise le nombre par 2. Pour autant il ne faudra pas les oublier dans votre conclusion.

Conclusion : Les couples recherchés sont donc les couples $(-27\ ;4)$; $(-11\ ;3)$; $(-3\ ;1)$; $(1\ ;-3)$;

$(3\ ;-11)$; $(4\ ;-27)$; $(6\ ;37)$; $(7\ ;21)$; $(9\ ;13)$; $(13\ ;9)$; $(21\ ;7)$; $(37\ ;6)$.

Ne pas oublier que lorsque vous cherchez un ensemble (ici vous cherchez l'ensemble de toutes les solutions (x ;y) , il va falloir procéder par équivalence ou alors raisonner par implication et ensuite effectuer une vérification…)

Exercice 4

Montrer que pour tout entier naturel n, $5^{2n}-14^n$ est un multiple de 11.

Soit n un entier naturel et $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $5^{2n}-14^n$ est un multiple de 11.

- **Initialisation** : La proposition est vraie au rang 0.

  En effet, $5^0-14^0=1-1=0$ et 0 est bien un multiple de 11.

- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse, il existe k_n entier tel que $5^{2n}-14^n=11\ k_n$ soit $5^{2n}=14^n+11\ k_n$

Remarque : cet entier k_n dépend de n (c'est-à-dire qu'à chaque fois que la valeur de n change, la valeur k_n également, voilà pourquoi on " indice ")

$5^{2n+2}-14^{n+1}=25\times 5^{2n}-14\times 14^n=25\ (11\ k_n+14^n)-14\times 14^n=11\ (25\ k_n+14^n)=11\ k_{n+1}$

Avec $k_{n+1}=25\ k_n+14^n$ qui est un entier comme produit et somme d'entiers.

Conclusion : Selon le principe de la démonstration par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}$, $5^{2n}-14^n$ est un multiple de 11.

Remarque : De l'égalité $5^{2n}-14^n=11\ k_n$, on pouvait en déduire que $14^n=5^{2n}-11\ k_n$
Et en remplaçant 14^n par $5^{2n}-11\ k_n$ dans l'égalité $5^{2n+2}-14^{n+1}=25\times 5^{2n}-14\times 14^n$
On en déduit que :

$5^{2n+2} - 14^{n+1} = 25 \times 5^{2n} - 14 \times (5^{2n} - 11\, k_n) = 11 \times 5^{2n} + 11\,(14\, k_n) = 11(5^{2n} + 14\, k_n) = 11\, k_{n+1}$ où $k_{n+1} = 5^{2n} + 14\, k_n$ est un entier (on aboutit encore au fait que 11 divise $5^{2n+2} - 14^{n+1}$).

On pourrait croire (à première vue) à tort que $25\, k_n + 14^n \neq 5^{2n} + 14\, k_n$
En fait les deux quantités sont bien égales. La preuve….

$25\, k_n + 14^n - (5^{2n} + 14\, k_n) = 11\, k_n + 14^n - 5^{2n} = (11\, k_n + 14n) - 5^{2n} = 0$ car $5^{2n} = 14^n + 11\, k_n$

Problème .

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

• s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

• s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

• s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

• s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$E_n = A_{n-1} \cap A_n$; $F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n$; $G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n}$; $H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$.

1. On admet que (E_n , F_n , G_n , H_n) est un système complet d'événements.

a. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(E_{n+1}) = \frac{2}{3} P(E_n) + \frac{1}{2} P(F_n).$$

D'après l'énoncé,

- si E_n se réalise c'est-à-dire que le joueur a gagné la $(n-1)^{\text{ième}}$ et la $n^{\text{ième}}$ partie, alors la probabilité que E_{n+1} se réalise est égale à $\frac{2}{3}$ donc $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{2}{3}$
- si F_n se réalise c'est-à-dire que le joueur a perdu la $(n-1)^{\text{ième}}$ et gagné la $n^{\text{ième}}$ partie, alors la probabilité que E_{n+1} se réalise est égale à $\frac{1}{2}$ donc $P_{F_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{2}$

Comme pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n, F_n , G_n , H_n) est un système complet d'événements, alors on peut appliquer la formule des probabilités totales à l'événement E_{n+1} :
D'où : $P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(F_n \cap E_{n+1}) + P(G_n \cap E_{n+1}) + P(H_n \cap E_{n+1})$
On peut remarquer déjà que :
$G_n \cap E_{n+1} = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \cap A_n \cap A_{n+1} = \varnothing$ (événement impossible)
$H_n \cap E_{n+1} = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n} \cap A_n \cap A_{n+1} = \varnothing$ (événement impossible)
Ainsi, $P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(F_n \cap E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(F_n)\, P_{F_n}(E_{n+1}) = \frac{2}{3} P(E_n) + \frac{1}{2} P(F_n)$

b. Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

De même, on a : $P(F_{n+1}) = P(E_n \cap F_{n+1}) + P(F_n \cap F_{n+1}) + P(G_n \cap F_{n+1}) + P(H_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} P(G_n) + \frac{1}{3} P(H_n)$

$\mathrm{P}(G_{n+1}) = \mathrm{P}(E_n \cap G_{n+1}) + \mathrm{P}(F_n \cap G_{n+1}) + \mathrm{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathrm{P}(H_n \cap G_{n+1}) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n)$

$\mathrm{P}(H_{n+1}) = \mathrm{P}(E_n \cap H_{n+1}) + \mathrm{P}(F_n \cap H_{n+1}) + \mathrm{P}(G_n \cap H_{n+1}) + \mathrm{P}(H_n \cap H_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(H_n)$

c. Pour tout $n \geq 2$, on a : $M\,U_n = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P(E_n)+\frac{1}{2}P(F_n) \\ \frac{1}{2}P(G_n)+\frac{1}{3}P(H_n) \\ \frac{1}{3}P(E_n)+\frac{1}{2}P(F_n) \\ \frac{1}{2}P(G_n)+\frac{2}{3}P(H_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(E_{n+1}) \\ P(F_{n+1}) \\ P(G_{n+1}) \\ P(H_{n+1}) \end{pmatrix} = U_{n+1}$

2. *a.* Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $P\,Q$. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

$$P\,Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

On a donc $P\,Q = 10\,I_4$ donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{10}Q$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. *a.* On admet que $M = P\,D\,P^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Comme $M = P\,D\,P^{-1}$ alors $P^{-1}M = P^{-1}(P\,D\,P^{-1})$ puis $P^{-1}M\,P = P^{-1}(P\,D\;P^{-1})\,P$ d'où $D = P^{-1}M\,P$ (en utilisant l'associativité du produit matriciel et le fait que $P\,P^{-1} = P^{-1}P = I_4$).

On trouve : $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$

- **<u>Initialisation</u>** :

$M^0 = I_4$ et $P\,D^0\,P^{-1} = P \times I_4 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I_4$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai

- **Hérédité** :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $M^n = P D^n P^{-1}$ (**), montrons alors que $M^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$

Par définition, $M^{n+1} = M^n \times M$

Donc $M^{n+1} = PD^n P^{-1} \times M$ (d'après l'hypothèse de récurrence (**)).

De plus on sait que $M = P D P^{-1}$.

Il en résulte que $M^{n+1} = P D^n P^{-1} \times P D P^{-1}$

Et en utilisant l'associativité du produit de matrices, et le fait que $P P^{-1} = P P^{-1} = I_4$ et que pour toute matrice carrée d'ordre 4, $I_4 \times B = B \times I_4 = B$, on en déduit que :

$$M^{n+1} = P D^n (P^{-1} \times P) D P^{-1} = P D^n \times I_4 \times D P^{-1} = P (D^n \times D) P^{-1} = P D^{n+1} P^{-1}$$

(on reconnaît $\mathcal{P}(n+1)$)

- **Conclusion** :

Selon le principe de la démonstration par récurrence, pour tout entier naturel n, $M^n = P D^n P^{-1}$

b. Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geq 2$, $U_n = M^{n-2} U_2$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\mathcal{Q}(n)$ la proposition : $U_n = M^{n-2} U_2$

- **Initialisation** :

$M^{2-2} = M^0 = I_4$ et $I_4 \times U_2 = U_2$, donc $\mathcal{Q}(2)$ est vraie

- **Hérédité** :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, supposons que $U_n = M^{n-2} U_2$, montrons alors que $U_{n+1} = M^{n-1} U_2$

D'après la question **1.*c.***, on a établi que $U_{n+1} = M U_n$

donc $U_{n+1} = M U_n = M \times M^{n-2} U_2$

En utilisant l'associativité du produit de matrices, on en déduit que :

$$U_{n+1} = M U_n = M^{n-1} U_2$$

(on reconnaît $\mathcal{Q}(n+1)$)

- **Conclusion** :

Selon le principe de la démonstration par récurrence, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $U_n = M^{n-2} U_2$

c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

D étant une matrice diagonale, on a : $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P\,D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{6^n} & 3\times\frac{1}{2^n} & 3 \\ -2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n & -\frac{1}{6^n} & -\frac{1}{2^n} & 2 \\ 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n & -\frac{1}{6^n} & \frac{1}{2^n} & 2 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{6^n} & -3\times\frac{1}{2^n} & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la 1[ère] **colonne** de la matrice M^n est donnée par la 1[ère] colonne du produit suivant :

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{6^n} & 3\times\frac{1}{2^n} & 3 \\ -2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n & -\frac{1}{6^n} & -\frac{1}{2^n} & 2 \\ 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n & -\frac{1}{6^n} & \frac{1}{2^n} & 2 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{6^n} & -3\times\frac{1}{2^n} & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ soit } \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\times\frac{1}{6^n} + 6\times\frac{1}{2^n} + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\times\frac{1}{6^n} - 2\times\frac{1}{2^n} + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\times\frac{1}{6^n} + 2\times\frac{1}{2^n} + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\times\frac{1}{6^n} - 6\times\frac{1}{2^n} + 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que la colonne de la matrice M^{n-2} est $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\times\frac{1}{6^{n-2}} + 6\times\frac{1}{2^{n-2}} + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\times\frac{1}{6^{n-2}} - 2\times\frac{1}{2^{n-2}} + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\times\frac{1}{6^{n-2}} + 2\times\frac{1}{2^{n-2}} + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\times\frac{1}{6^{n-2}} - 6\times\frac{1}{2^{n-2}} + 3 \end{pmatrix}$

Et comme on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties, alors P(E_2) = 1 et

P(F_2)= P(G_2)= P(H_2) donc $U_2 = \begin{pmatrix} P(E_2) \\ P(F_2) \\ P(G_2) \\ P(H_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De l'égalité $U_n = M^{n-2}\, U_2$, on en déduit que $U_n = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\times\dfrac{1}{6^{n-2}} + 6\times\dfrac{1}{2^{n-2}} + 3 \\ 2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\times\dfrac{1}{6^{n-2}} - 2\times\dfrac{1}{2^{n-2}} + 2 \\ -2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\times\dfrac{1}{6^{n-2}} + 2\times\dfrac{1}{2^{n-2}} + 2 \\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\times\dfrac{1}{6^{n-2}} - 6\times\dfrac{1}{2^{n-2}} + 3 \end{pmatrix}$

Par suite pour tout $n \geq 2$,

$\mathrm{P}(E_n) = \dfrac{1}{10}\left[-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\times\dfrac{1}{6^{n-2}} + 6\times\dfrac{1}{2^{n-2}} + 3\right]$; $\mathrm{P}(F_n) = \dfrac{1}{10}\left[2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\times\dfrac{1}{6^{n-2}} - 2\times\dfrac{1}{2^{n-2}} + 2\right]$

$\mathrm{P}(G_n) = \dfrac{1}{10}\left[-2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\times\dfrac{1}{6^{n-2}} + 2\times\dfrac{1}{2^{n-2}} + 2\right]$; $\mathrm{P}(H_n) = \dfrac{1}{10}\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\times\dfrac{1}{6^{n-2}} - 6\times\dfrac{1}{2^{n-2}} + 3\right]$

Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ ainsi que $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{6}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{6^{n-2}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n-2}} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n) = \dfrac{3}{10}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n) = \dfrac{2}{10}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} P(G_n) = \dfrac{2}{10}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} P(H_n) = \dfrac{3}{10}$.

On peut remarquer que $\dfrac{3}{10}+\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{10}=1$

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n .$$

1. Calculer u_2 et u_3.

   $u_2 = 5\ u_1 - 6\ u_0 = 5\,(8) - 6(3) = 22$ et $u_3 = 5\ u_2 - 6\ u_1 = 5(22) - 6(8) = 62$

2. A l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?

On conjecture que la suite (u_n) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = AC_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5\ u_{n+1} - 6\ u_n$ et $u_{n+1} = 1 \times u_{n+1} - 0 \times u_n$

Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a bien $C_{n+1} = AC_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $C_n = A^n C_0$

- **Initialisation** :

  On a $A^0 = I_2$ et $I_2 \times C_0 = C_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

  Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

  On sait que $C_{n+1} = AC_n$

  Et l'hypothèse de récurrence permet d'écrire :

  $C_{n+1} = AC_n = A \times (A^nC_0) = (A \times A^n)\, C_0 = A^{n+1}\, C_0$ (associativité du produit matriciel)

  (c'est $\mathcal{P}(n+1)$)

Conclusion : Selon le principe de la démonstration par récurrence, pour tout entier naturel n, on a :

$$C_n = A^nC_0$$

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer QP

$Q\,P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ donc P est inversible d'inverse Q (ou Q est inversible d'inverse P)

a. Montrer que $QA = DQ$.

$Q\,A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ et $D\ \ Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ donc $Q\,A = D\,Q$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

Question classique, je vous la laisse… juste un petit détail, le rang initial est 1 et non 0. …

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix}$.

En déduire une expression de u_n en fonction de n. La suite (u_n) est -elle convergente ?

Comme $C_n = A^nC_0$ et que $C_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$C_n = \begin{pmatrix} 8\times(-2^{n+1} + 3^{n+1}) + 3(3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1}) \\ 8\times(-2^n + 3^n) + 3(3\times 2^n - 2\times 3^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 2\times 3^{n+1} \\ 2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Par suite, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 2 \times 3^n$

Comme 2 et 3 sont strictement plus grands que 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, on en déduit alors par produit puis par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

remarque : on pourrait prouver la conjecture sur la monotonie de la suite (u_n).

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} + 2 \times 3^{n+1} - (2^n + 2 \times 3^n) = 2^n(2-1) + 2 \times 3^n(3-1) = 2^n + 4 \times 3^n$.

Il est clair que pour tout n de $\mathbb{N}$, $2^n + 4 \times 3^n > 0$ (somme de termes strictement positifs).

Conclusion : la suite (u_n) est bien strictement croissante.