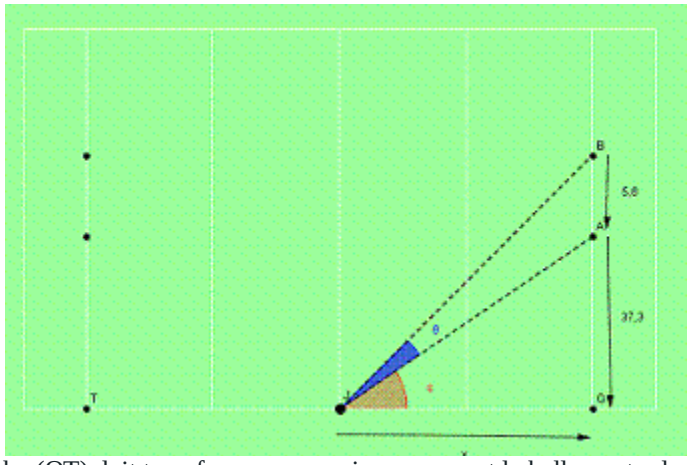
On a représenté un terrain de rugby vu de dessus.




Un joueur J placé le long de la touche (OT) doit transformer un essai en envoyant le ballon entre les poteaux A et B.
On cherche à quelle distance OJ de la ligne de but il doit se placer pour que l'angle de tir soit maximal.

On donne OA = 37,5 *m*, AB = 5,6 *m* et on note OJ = *x*, en mètre, avec $0 \leq x \leq 100$. On note $\alpha = \widehat{OJA}$ et $\beta = \widehat{OJB}$, et $\theta = \widehat{BJA}$ l'angle de tir.

1. Exprimer tan(α) et tan(β).
2. Démontrer que $\tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$.
3.*a.* Etudier le sens de variation sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan : $\theta \to \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

*b.* En déduire que tan θ est maximal quand θ est maximal.

4. Soit $f(x) = \dfrac{5{,}6\,x}{x^2 + 1600{,}17}$ sur [0 ; 100].

*a.* Déterminer en quelle valeur $x_0$, $f$ atteint son maximum.
*b.* Préciser la position du joueur pour un angle de tir maximal et donner cet angle à 0,1° près.
Sera t'il si facile de transformer l'essai ?

**CORRECTION**

1. $\tan(\alpha) = \dfrac{OA}{OJ} = \dfrac{37{,}3}{x}$ et $\tan(\beta) = \dfrac{OB}{OJ} = \dfrac{37{,}3 + 5{,}6}{x} = \dfrac{42{,}9}{x}$.

2. $\tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta}$.

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\cos\alpha\cos\beta\left(\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\cos\beta\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} + 1\right)} = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

3.*a.* Etudier le sens de variation sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan : $\theta \to \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

La fonction tan est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc est dérivable sur son domaine de définition.

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, soit $\begin{cases} u(x) = \sin x & u'(x) = \cos x \\ v(x) = \cos x & v'(x) = -\sin x \end{cases}$ donc $\tan'(x) = \dfrac{\cos^2 x - (-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

La fonction tan est donc strictement croissante sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

| $x$ | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| tan'($x$) | | + | |
| tan | 0 | ↗ | + ∞ |

*b.* La fonction tan est strictement croissante sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc tan θ est maximal quand θ est maximal.

4. Soit $f(x)= \dfrac{5,6\,x}{x^2+1600,17}$ sur [0 ; 100].

*a.* $f'(x) = \dfrac{x^2+1600,17 - x\times 2\,x}{(x^2+1600,17)^2} = \dfrac{1600,17 - x^2}{(x^2+1600,17)^2} = \dfrac{\left(\sqrt{1600,17} - x\right)\left(\sqrt{1600,17} + x\right)}{(x^2+1600,17)^2}$ $x \in [0 ; 100]$ donc $f'(x)$ *a* le même signe que $\sqrt{1600,17} - x$.

| $x$ | 0 | | $\sqrt{1600,17}$ | | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | 0 | – | |
| $f$ | 0 | ↗ | | ↘ | |

$f$ atteint son maximum pour $x_0 = \sqrt{1600,17}$

*b.* $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\,\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{42,9}{x} - \dfrac{37,3}{x}}{1 + \dfrac{37,3}{x}\times\dfrac{42,9}{x}}$

$\tan\theta = \dfrac{5,6\,x}{x^2+1600,17}$ donc $\tan\theta$ est maximal pour $x = \sqrt{1600,17}$

$\tan\theta$ est maximal quand $\theta$ est maximal donc $\theta$ est maximal pour $x = \sqrt{1600,17}$ .

$\tan\theta = \dfrac{5,6\times\sqrt{1600,17}}{2\times 1600,17} = \dfrac{2,8\times\sqrt{1600,17}}{1600,17}$ donc $\theta \approx 0,07$ °

La transformation sera particulièrement délicate.