Amérique du Nord mai 2013

Exercice 1 5 points Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; – 1 ; – 2) et D (7 ; – 1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; – 1 ; 3).

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b. Vérifier que la droite *d*, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c. La droite *d* et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2 5 points Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	*n* est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de *n*
	Affecter à *u* la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à *n*
	Affecter à *u* la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher *u*

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de *n*.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	2,000 0	2,000 0

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n)?

2. *a*. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $0 < u_n \leq 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel *n*, l'expression de v_n en fonction de *n*, puis de u_n en fonction de *n*.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de *n* telle que $u_n > 1{,}999$.

Variables :	*n* est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Affecter à *n* la valeur 0
	Affecter à *u* la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Exercice 2 5 points Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        a est un entier naturel
                   b est un entier naturel
                   c est un entier naturel
Initialisation :   Affecter à c la valeur 0
                   Demander la valeur de a
                   Demander la valeur de b
Traitement :       Tant que a > b
                   | Affecter à c la valeur c + 1
                   | Affecter à a la valeur a − b
                   Fin de tant que
Sortie :           Afficher c
                   Afficher a
```

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9\,m + 5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9\,x \equiv 1\ [26]$.
2. Démontrer alors l'équivalence : $9\,m + 5 \equiv p\ [26] \Leftrightarrow m = 3\,p - 15\ [26]$.
3. Décoder alors la lettre B.

Exercice 3 5 points Commun à tous les candidats

Les parties A. B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leq -1{,}751) \approx 0{,}040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

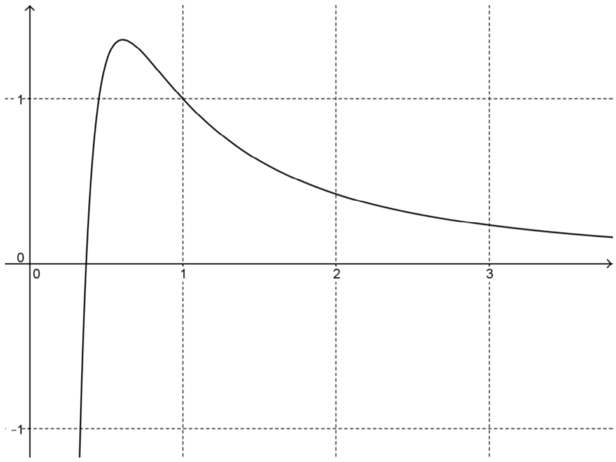
1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Exercice 4 5 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous :



1. *a.* Étudier la limite de f en 0.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C.

2. *a.* On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b. Résoudre sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. *a.* Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

4. Pour tout entier $n > 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$.

a. Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln x}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

b. Calculer I_n en fonction de n.

c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

CORRECTION

Exercice 1 5 points Commun à tous les candidats

1. $\overrightarrow{AB}(1 ; -1 ; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2 ; -5 ; -3)$. Les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. *a.* $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$

$\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 4 + 5 - 9 = 0$

La droite Δ est orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont sécantes donc la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

b. la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC), donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $2x - y + 3z + d = 0$

A(0 ; 4 ; 1) est un point du plan donc $2 \times 0 - 1 \times 4 + 3 \times 1 + d = 0$

$-4 + 3 + d = 0$ soit $d = 1$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$

c. M $\in \Delta \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{DM} = k\,\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 2k \\ y + 1 = -k \\ z - 4 = 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 4 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

d. H $\in \Delta$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que les coordonnées de H soient $(7 + 2k ; -1 - k ; 4 + 3k)$

H appartient au plan (ABC) donc $2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0$

soit $2(7 + 2k) - (-1 - k) + 3(4 + 3k) + 1 = 0$

$14 + 4k + 1 + k + 12 + 9k + 1 = 0$

$14k + 28 = 0$ donc $k = -2$

Les coordonnées de H soient $(7 + 2k ; -1 - k ; 4 + 3k)$ avec $k = -2$ donc H a pour coordonnées $(3 ; 1 ; -2)$.

3. Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a. Le vecteur $\overrightarrow{n_1}(1 ; 1 ; 1)$ est un vecteur normal à P_1.

Le vecteur $\overrightarrow{n_2}(1 ; 4 ; 0)$ est un vecteur normal à P_2.

Les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles, donc les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b. Soit M un point de d, donc M $\in P_1 \cap P_2$ donc les coordonnées de M vérifient : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$

En posant $y = t$, $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + t + z = 0 \\ x + 4t + 2 = 0 \end{cases}$ et $y = t$

donc $x = -4t - 2$ et $z = -t - x = 3t + 2$

La droite d, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

c. Un vecteur directeur de d est $\vec{v}(-4 ; 1 ; 3)$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$ donc un vecteur normal au plan est $\vec{n}(2 ; -1 ; 3)$

$\vec{v}.\vec{n} = -4 \times 2 + 1 \times (-1) + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0$ donc la droite d et le plan (ABC) sont parallèles.

Exercice 2 5 points Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

1. *a.* Une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$ est 1,8340

i	1	2	3
u	1,4142	1,6818	1,8340

b. Cet algorithme permet de calculer le terme u_n pour une valeur quelconque de n.

c. La suite (u_n) semble être croissante et avoir pour limite 2.

2. *a.* Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 2$.

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 2$. La propriété est vérifiée pour $n = 2$.

Hérédité : Montrons pour tout n de N que, si $0 < u_n \leq 2$ alors $0 < u_{n+1} \leq 2$.

$0 < u_n \leq 2$ donc $0 < 2u_n \leq 4$ donc $0 < \sqrt{2u_n} \leq 2$ soit $0 < u_{n+1} \leq 2$

La propriété est héréditaire donc pour tout n de N, $0 < u_n \leq 2$.

b. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\,(\sqrt{2} - \sqrt{u_n}\,)$

$0 < u_n \leq 2$ donc $\sqrt{u_n} \leq \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} - \sqrt{u_n}\,) \geq 0$

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

c. la suite (u_n) est croissante majorée par 2 donc est convergente.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. $v_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(2u_n) - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln(u_n)) - \ln 2$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2)$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$ donc pour tout entier naturel n, $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\ln 2$, soit $v_n = -\frac{\ln 2}{2^n}$.

$\ln u_n = v_n + \ln 2$ donc $u_n = e^{v_n + \ln 2} = 2\,e^{-\frac{\ln 2}{2^n}}$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{\ln 2}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2\,e^0 = 2$

d.

Variables :	*n* est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Affecter à *n* la valeur 0
	Affecter à *u* la valeur 1
Traitement :	Tant Que $u \leq 1{,}999$ faire
	Affecter à *u* la valeur $\sqrt{2u}$
	n prend la valeur *n* + 1
	FinTantQue
Sortie :	Afficher *n*

Exercice 2 5 points Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

Partie A

1. $b = 4$

a	13	9	5	1
c	0	1	2	3

$(a < b)$ l'algorithme s'arrête, et affiche $c = 3$ et $a = 1$

2. L'algorithme permet de calculer le reste (affichage a) et le quotient (affichage c) de la division euclidienne de a par $\boldsymbol{b}$.

Partie B

1. Etape 1 : U → 20 donc $m = 20$

$9m + 5 = 9 \times 20 + 5 = 185$ On divise 185 par 26 : $185 = 26 \times 7 + 3$

Etape 2 : $p = 3$

Etape 3 : 3 → D donc U est codé par D.

2.

Variables :	*m* est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à *c* la valeur 0
	Affecter à *b* la valeur 26
	Demander la valeur de *m*
	Affecter à *m* la valeur 9**m* + 5
Traitement :	Tant que $m > b$
	Affecter à *c* la valeur *c* + 1
	Affecter à *m* la valeur $m - b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher *c*

Partie C

1. $9 \times 3 = 27$ et $27 \equiv 1$ [26] donc $9 \times 3 \equiv 1$ [26] donc $x = 3$ vérifie $9\,x \equiv 1$ [26]

2. $9\,m + 5 \equiv p$ [26],

26 et 3 sont premiers entre eux donc 26 divise $9\,m + 5 - p \Leftrightarrow$ 26 divise $3\,(9\,m + 5 - p)$ (théorème de Gauss) $\Leftrightarrow 27\,m + 15 - 3\,p \equiv 0$ [26] $\Leftrightarrow m = 3\,p - 15$ [26].

3. B $\to$ 1 donc $p = 1$ donc $m \equiv 3 \times 1 - 15$ [26] soit $m \equiv -12$ [26]

$m \equiv -12 + 26$ [26] soit $m \equiv 14$ [26] or $0 \le m \le 25$ donc $m = 14$

14 $\to$ O donc la lettre B correspond à la lettre O

Exercice 3 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. $P(390 \le X \le 410) = P(X \le 410) - P(X \le 390) = 0{,}818 - 0{,}182 = 0{,}636$

2. La probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable est $P(X \ge 385) = 1 - P(X \le 385) = 0{,}994$

3. $Z = \dfrac{X - 400}{\sigma}$, $P(X \ge 385) = 0{,}96 \Leftrightarrow P(X \le 385) = 0{,}04 \Leftrightarrow P\left(Z \le \dfrac{385 - 400}{\sigma}\right) = 0{,}04 \Leftrightarrow \dfrac{-15}{\sigma} = -1{,}751 \Leftrightarrow \sigma = \dfrac{15}{1{,}751} \Leftrightarrow \sigma \approx$ 8,6

Partie B

1. $I = \left[\, 0{,}96 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}96 \times (1 - 0{,}96)}{300}}\ ;\ 0{,}96 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}96 \times (1 - 0{,}96)}{300}}\,\right]$

$I = [\ 0{,}937\ ;\ 0{,}983\ ]$

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Pour l'échantillon, la fréquence des pains commercialisables est $f = \dfrac{283}{300}$ soit environ 0,943.

0,943 appartient à l'intervalle de fluctuation I donc l'objectif a été atteint au risque 5 %.

Partie C

$$P(X \ge t) = e^{-\lambda t} \text{ et } P(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

1. $P(T \ge 30) = 0{,}913$ donc $e^{-\lambda \times 30} = 0{,}913$ donc $-\lambda \times 30 = \ln 0{,}913$ soit $\lambda = -\dfrac{\ln 0{,}913}{30}$ soit environ $\lambda = 0{,}003$.

2. T suit une loi exponentielle (à durée de vie sans vieillissement) donc la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 30 jours donc $P(T \ge 30) = 0{,}913$

3. $P(T \ge 365) = e^{-\lambda \times 365} = 0{,}335$ donc le vendeur n'a pas raison

$P(T \ge n) \ge 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-\lambda n} \ge 0{,}5 \Leftrightarrow -\lambda\, n \ge \ln 0{,}5 \Leftrightarrow n \le -\dfrac{\ln 0{,}5}{0{,}003}$ soit 231 jours au maximum.

Exercice 4 5 points Commun à tous les candidats

1. *a.* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}(1 + \ln x)$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la courbe C admet pour asymptote la droite d'équation $x = 0$ et en $+\infty$, la droite d'équation $y = 0$.

2. *a.* Soit $\begin{cases} u(x) = 1 + \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x^2 & v'(x) = 2\,x \end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et

donc $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2\,x\,(1 + \ln x)}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{x - 2\,x\,(1 + \ln x)}{x^4} = \dfrac{x\,(-1 - 2\ln x)}{x^4}$ donc pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\ln x}{x^3}$.

b. Sur $]\,0\,;+\infty\,[$: $-1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow -1 > 2\ln x \Leftrightarrow \ln x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{-0{,}5}$.

$f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]\,0\,;e^{-0{,}5}\,[$ et $f'(x) \ge 0$ sur $[\,e^{-0{,}5}\,;+\infty\,[$.

c. $\ln e^{-0,5} = -0,5$ donc $1 + \ln e^{-0,5} = 0,5$ et $(e^{-0,5})^2 = e^{-1}$ donc $f(e^{-0,5}) = \dfrac{e}{2}$

x	0		$e^{-0,5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{e}{2}$	$\searrow$	0

3. *a.* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.
la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, de coordonnées $(e^{-1} ; 0)$
b. f est strictement décroissante sur $[\, e^{-1} ; +\infty\, [$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[\, e^{-1} ; +\infty\, [$

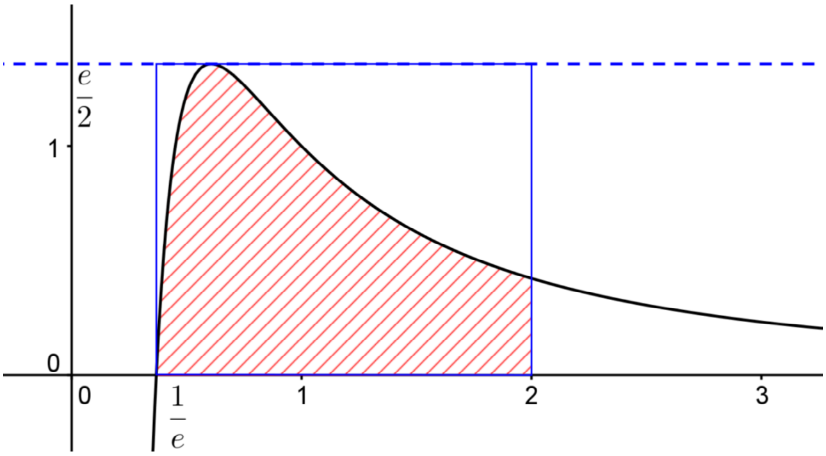
f est strictement croissante $]\, 0 ; e^{-0,5}\, [$ et $f(e^{-1}) = 0$ donc :
sur $]\, 0 ; e^{-1}\, [$, $f(x) < 0$
$f(e^{-1}) = 0$
sur $]\, e^{-1} ; +\infty\, [$, $f(x) > 0$

4. Pour tout entier $n > 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$.

a. I_2 est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 2$ (aire hachurée). Cette aire est inférieure à celle du rectangle bleu.

La longueur de ce rectangle est $2 - \dfrac{1}{e}$, sa largeur est égale au maximum de f donc à $\dfrac{e}{2}$ donc $I_2 \leq \dfrac{e}{2} \times \left(2 - \dfrac{1}{e}\right)$ soit $I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$.

Une aire est positive donc $0 \leq I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$.



b. La fonction f est positive sur$]\, e^{-1} ; +\infty\, [$, donc $I_n = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{n} f(x)\, dx$

$I_n = F(n) - F(e^{-1}) = \dfrac{-2 - \ln n}{n} - \dfrac{-2 - \ln e^{-1}}{e^{-1}}$

$\dfrac{-2 - \ln e^{-1}}{e^{-1}} = \dfrac{-2 - (-1)}{e^{-1}} = -e$ donc $I_n = \dfrac{-2 - \ln n}{n} + e$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = e$

L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{e}$ est égale à e.