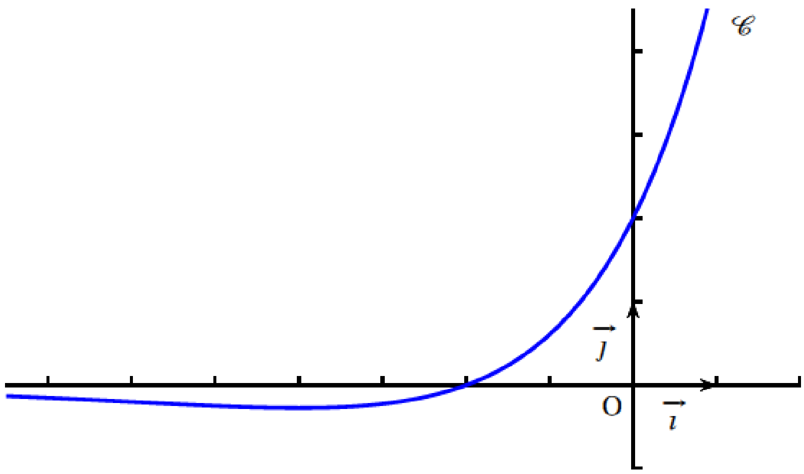
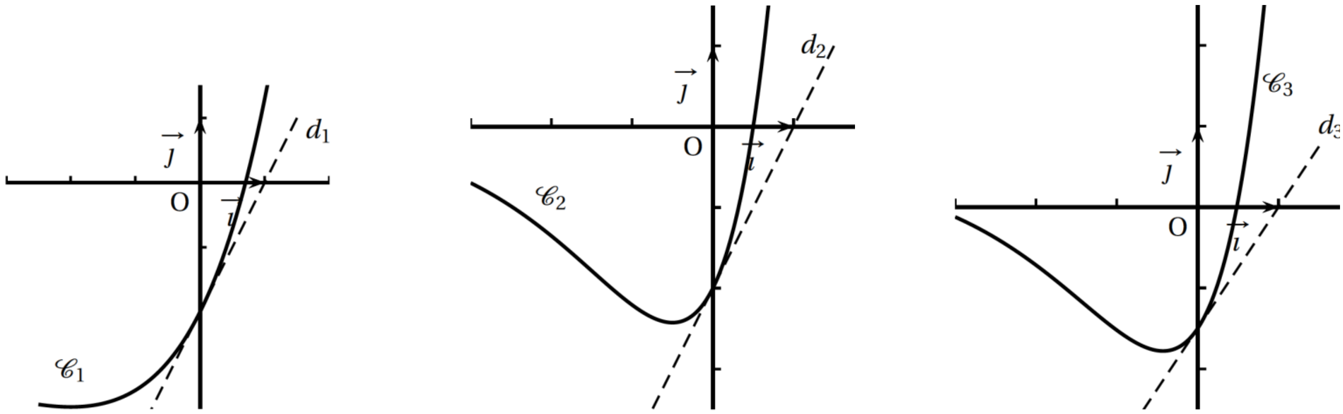
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note **C** sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.



Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe **C** et trois autres courbes **C** $_1$, **C** $_2$, **C** $_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. À l'aide de la courbe **C** , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b. L'une des courbes **C** $_1$, **C** $_2$, **C** $_3$ est la courbe représentative de la fonction F.

Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

1. L'observation de la courbe **C** permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

a. Interpréter géométriquement le réel I .

b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

Vérifier que $f = 2\,(u'v + uv')$.

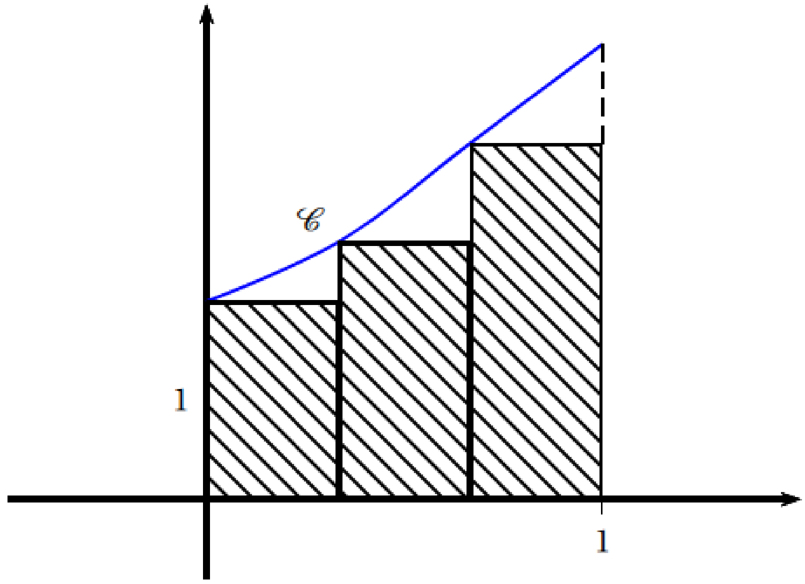
c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ | Affecter à s la valeur $s + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.

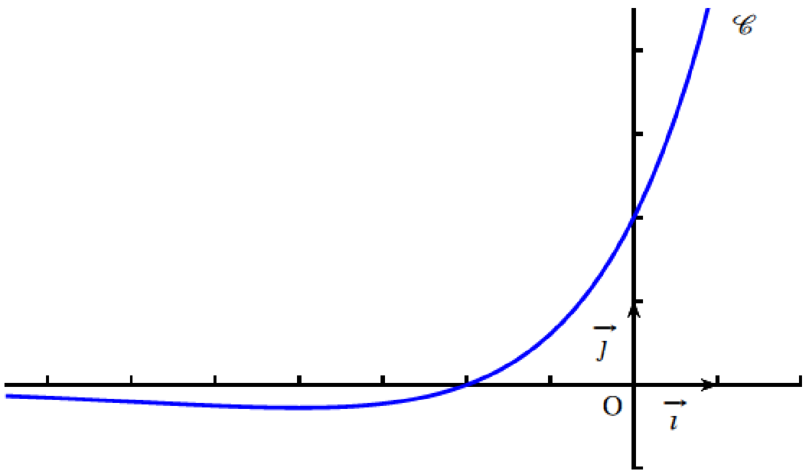


b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

CORRECTION

Partie A

1. Graphiquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$

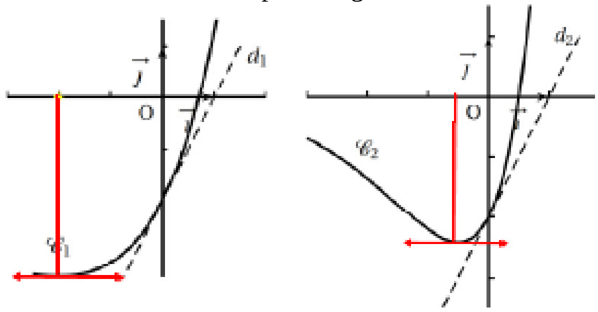


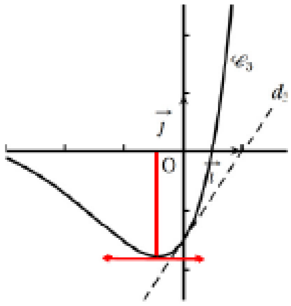
2. ***a.*** F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ donc F' = f.

F'(0) = $f(0) = 2$
F'(– 2) = $f(-2) = 0$

b. F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ donc F' = f donc F est décroissante sur $]-\infty\,;-2]$ et F est croissante sur $[-2\,;+\infty[$.

F'(– 2) = $f(-2) = 0$ donc la courbe représentative de F admet au point d'abscisse – 2 une tangente horizontale.
$\mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_3$ ne remplissent pas ces conditions donc ne conviennent pas : tangente non horizontale en – 2 pour les deux courbes.





Partie B

1. L'observation de la courbe **C** permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. $\begin{cases} u(x) = x+2 & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} & v'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + (x+2)\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,[\,2 + (\,x+2\,)\,] = \frac{1}{2}(x+4)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 4$

si $x \leq -4$, $f'(x) \leq 0$

si $x \geq -4$, $f'(x) \geq 0$ donc f admet un minimum pour $x = -4$

2. *a.* La fonction f est définie continue positive sur $[\,0\,;\,1\,]$ donc I est l'aire de la partie de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

b. $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} & v'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$ donc $2\,(u'\,v + u\,v')\,(x) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = (x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ donc $f = 2\,(u'\,v + u\,v')$.

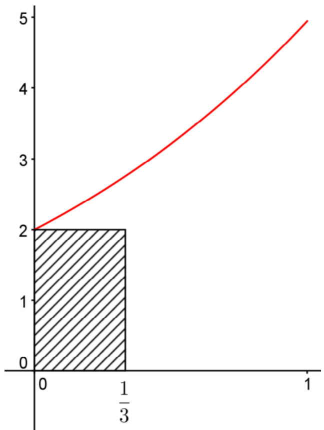
c. $f = 2\,(u'\,v + u\,v') = 2\,(u\,v)'$ donc une primitive de f est la fonction F telle que $F = 2\,u\,v$

$I = F(1) - F(0) = 2 \times 1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 2 \times 0\,\mathrm{e}^{0} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

3. *a.*

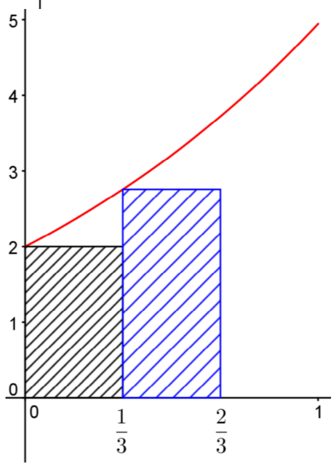
Initialisation $s = 0$

Pour k = 0, $\frac{1}{3}\,f(0)$ est l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de longueur $f(0)$ soit l'aire du rectangle hachuré :
donc s prend la valeur égale à l'aire hachurée en noir

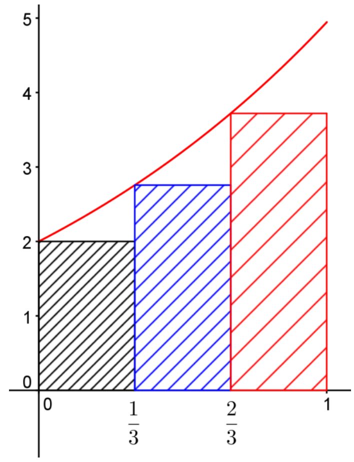


Pour k = 1, à cette aire on ajoute $\frac{1}{3}\,f\left(\frac{1}{3}\right)$ donc on ajoute l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de longueur $f\left(\frac{1}{3}\right)$ soit l'aire du rectangle hachuré en bleu

s prend donc la valeur égale à la somme des deux aires hachurées.



Pour k = 2, à cette aire on ajoute $\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$ donc on ajoute l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de longueur $f\left(\frac{2}{3}\right)$ soit l'aire du rectangle hachuré en rouge.
s prend donc la valeur égale à la somme des trois aires hachurées.
L'algorithme s'arrête donc s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-contre



b. L'affichage de l'algorithme obtenu après n boucles (de k = 0 à $k = (n-1)$) est la somme de n termes qui sont de la forme $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ donc l'affichage est : $\frac{1}{n}f(0)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

C'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des x entre x = 0 et x = 1, leur largeur vaut $\frac{1}{n}$ leur longueur $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Quand n devient grand, s_n se rapproche de $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.