On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et pour tout n de N, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

1. Conjecturer une formule explicite pour v_n.
2. En déduire une conjecture pour u_n
3. La démontrer

CORRECTION

1.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	$\frac{9}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{9}$
v_n	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25

donc on peut conjecturer que $v_n = 1 + 0{,}25\, n$

2. $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ donc $v_n(u_n - 1) = 1$ soit $u_n v_n = 1 + v_n$ donc $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n} = \dfrac{2 + 0{,}25\, n}{1 + 0{,}25\, n} = \dfrac{8 + n}{4 + n}$.

3. Montrons par récurrence que $u_n = \dfrac{8 + n}{4 + n}$.

Initialisation : si $n = 0$ alors $\dfrac{8 + n}{4 + n} = \dfrac{8}{4} = 2 = u_0$, la propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons pour tout n de N que si $u_n = \dfrac{8 + n}{4 + n}$, alors $u_{n+1} = \dfrac{9 + n}{5 + n}$

$u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$ or $5u_n - 1 = 8\dfrac{8 + n}{4 + n} - 1 = \dfrac{5(8 + n) - (4 + n)}{4 + n} = \dfrac{36 + 4n}{4 + n} = 4\dfrac{9 + n}{4 + n}$

$u_n + 3 = \dfrac{8 + n}{4 + n} + 3 = \dfrac{8 + n + 3(4 + n)}{4 + n} = \dfrac{20 + 4n}{4 + n} = 4\dfrac{5 + n}{4 + n}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} = \dfrac{4\dfrac{9 + n}{4 + n}}{4\dfrac{5 + n}{4 + n}} = \dfrac{9 + n}{5 + n}$

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $u_n = \dfrac{8 + n}{4 + n}$.