BTS — groupement C

Correction épreuve Mathématiques

Session 2005

Exercice 1 (9 points)

Partie A.

Soit l'équation : $(E)\ y' - 2y = 4x$

1. $y = Ce^{2x}$ où C est une constante réelle, dépendant des conditions initiales.
2. (a) Recherche d'une solution particulière sous la forme $g(x) = ax + b$: g est une solution de (E) si et seulement si $-2ax + a - 2b = 4x$, soit $a = -2$ et $b = -1$. Donc $g(x) = -2x - 1$.

   (b) Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions générales de (E_0). L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions

$$f(x) = Ce^{2x} - 2x - 1 \quad C \in \mathbf{R}$$

3. Si on impose $f(0) = 0$ et alors : $C = 1$, d'où

$$f(x) = e^{2x} - 2x - 1$$

Partie B.

1. En $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$
2. Au voisinage de $+\infty$, pour lever l'indétermination sur la limite, on écrit f sous la forme : $f(x) = e^{2x}\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} - \dfrac{1}{e^{2x}}\right)$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^{2x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$
3. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f'(x) = 2(e^{2x} - 1)$. Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geqslant 0$

Partie C.

1. On a $f(x) - (-2x - 1) = \mathrm{e}^{2x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$.
   La droite d'équation $y = -2x - 1$ est donc une asymptote au voisinage de $-\infty$
2. *cf courbe.*
3. L'aire de ce domaine est $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ u.a. (où 1u.a.=2 cm^2) , et on a :

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - x^2 - x\right]_0^1 = \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{5}{2}\right) \times 2 \text{ cm}^2 = \mathrm{e}^2 - 5 \text{ cm}^2 \simeq 2,39 \text{ cm}^2$$

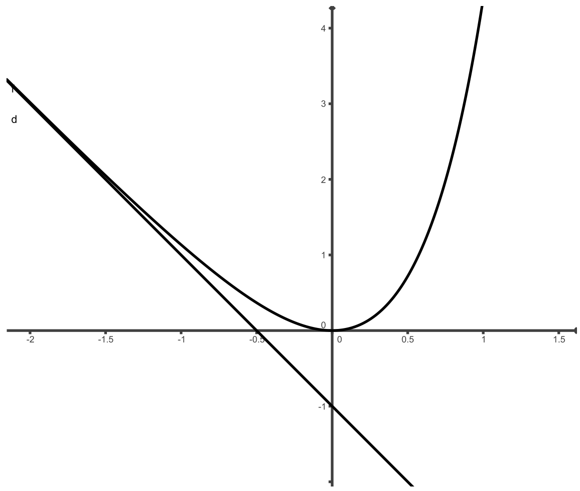

FIG. 1 – **courbe exercice 1**

Exercice 2 (11 points)

Partie A.

Si D désigne l'évènement « l'axe est défectueux », on a :

$$p(D) = p_E(D) \cdot p(E) + p_F(D) \cdot p(F) + p_G(D) \cdot p(G) = 0,0245$$

Partie B.

1. La calculatrice donne : $a \simeq 0,292$ et $b \simeq 0,725$.
2. Le pourcentage d'axe défecteux le 11$^{\mathrm{e}}$jour est environ $0,292 \times 11 + 0,725 \simeq 3,9\%$

Partie C.

1. Il s'agit de reproduire 50 fois une expérience aléatoire à deux issues : « axe défectueux »($p = 0,025$) ou « convenable »($1 - p = 0,975$). Y suit donc une loi binomiale de paramètres 50 et 0,025.
2. $p(Y = 2) = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix} 0,025^2 \cdot 0,975^{48} \simeq 0,227$

Partie D.

1. (a) L'hypothèse nulle est H_0 : « longueur $= 350$ mm » ; l'hypothèse alternative est « $l \neq 350$ mm »

   (b) Comme $\overline{X}$ suit une loi normale de paramètres 350 et 0,5, $T = \dfrac{\overline{X} - 350}{0,5}$ suit une loi normale centrée réduite et

   $$p(\overline{X} \in [350-h; 350+h]) = p(T \in [-\frac{h}{0,5}; \frac{h}{0,5}]) = 2\Pi(\frac{h}{0,5})-1 = 0,95$$

   On trouve $\dfrac{h}{0,5} \simeq 1,96$, soit $h \simeq 0,98$

   (c) La règle de décision du test est alors : si la moyenne des longueurs observées est comprise entre 349,02 et 350,32 , on accepte H_0 au seuil de risque de 5%, sinon, on accepte H_1
2. Comme $\overline{L} = 349 < 349,02$, on réfute H_0 : la machine est mal réglée au risque de 5%